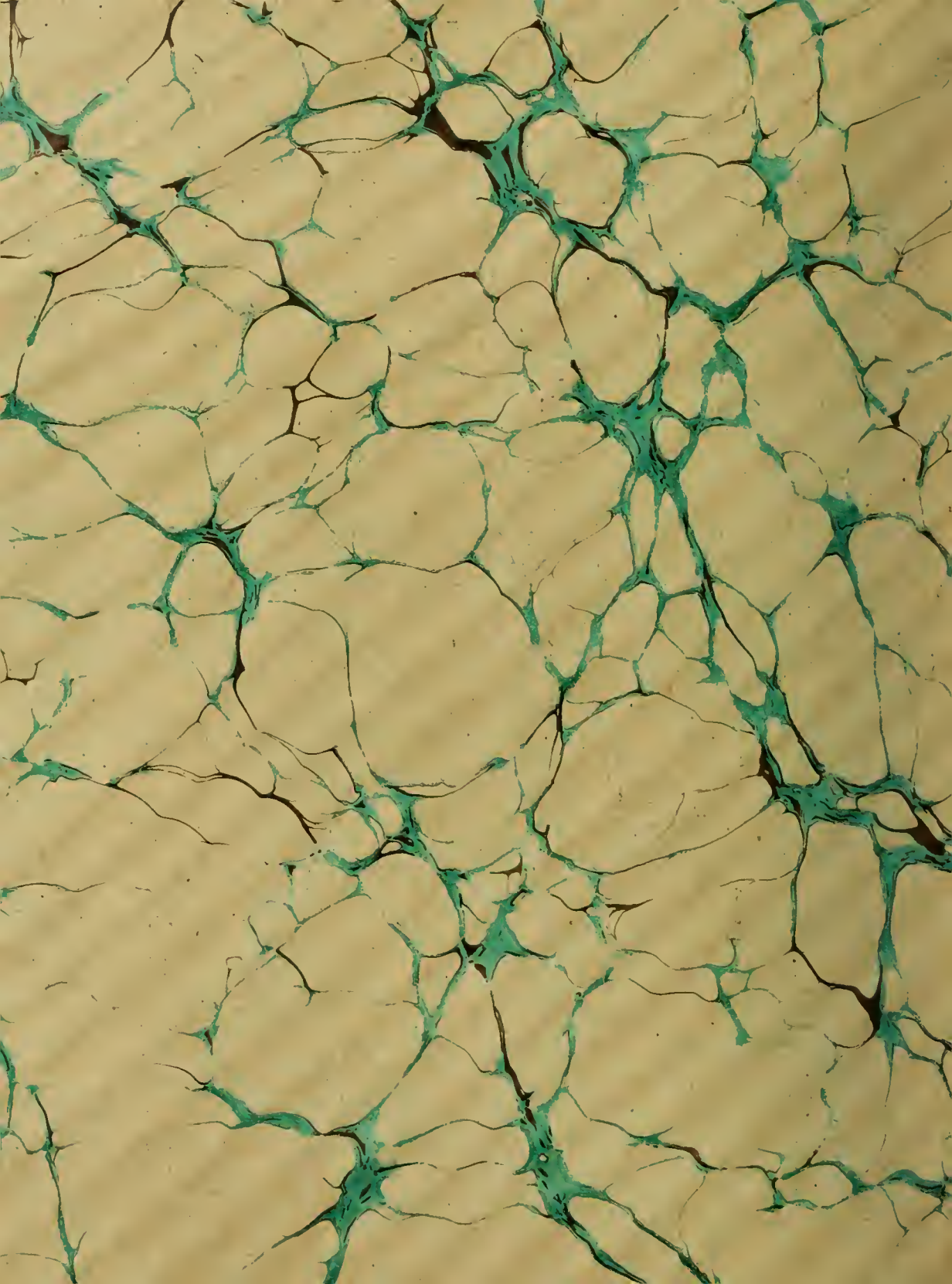


Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2journaldemat09liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME IX. — ANNÉE 1864.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, n° 55.

1864

QA
1
J684
sér. 2
t. 9

20785
c.

TABLE DES MATIÈRES,

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME IX.

Pages.

Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2$; par M. *J. Liouville*. 1

Sur la forme $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2$; par M. *J. Liouville*. 13

Sur la forme $x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2)$; par M. *J. Liouville*.. 17

Sur la forme $2x^2 + 2xy + 3y^2 + 5z^2 + 5t^2$; par M. *J. Liouville*. 23

Solution de divers problèmes de Mécanique, dans lesquels les conditions imposées aux extrémités des corps, au lieu d'être invariables, sont des fonctions données du temps, et où l'on tient compte de l'inertie de toutes les parties du système; par M. *Phillips*. 25

Extension du théorème de Rolle aux racines imaginaires des équations; par M. *J. Liouville*. 84

Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2$, par M. *J. Liouville*. 89

Sur la forme $x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$; par M. *J. Liouville*. 105

Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2$; par M. *J. Liouville*. . 115

Sur la forme $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$; par M. *J. Liouville*. 119

Sur la forme $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2$; par M. *J. Liouville*. . 123

Sur une généralisation de la formule de Taylor; par M. *Édouard Roche*. . . . 129

Nouveau théorème concernant le quadruple d'un nombre premier de l'une ou de l'autre des deux formes $20k + 3$, $20k + 7$; par M. *J. Liouville* 135

Théorèmes concernant l'octuple d'un nombre premier de l'une on de l'autre des deux formes $20k + 3$, $20k + 7$; par M. *J. Liouville*. 137

Sur les théorèmes de M. Kronecker relatifs aux formes quadratiques; par M. *Hermite*. 145

Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 3t^2$; par M. *J. Liouville*. 160

Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2$; par M. *J. Liouville* 161

Sur la forme $x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$; par M. *J. Liouville*. 175

Sur la forme $x^2 + xy + y^2 + 6z^2 + 6zt + 6t^2$; par M. *J. Liouville*. 181

Sur la forme $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3z^2 + 3zt + 3t^2$; par M. *J. Liouville*. . . . 183

Méthode nouvelle pour l'intégration des équations différentielles linéaires ne

Pages

contenant qu'une variable indépendante; par M. *J. Caqué*. 185
Sur la forme $x^2 + xy + y^2 + 3z^2 + 3zt + 3t^2$; par M. *J. Liouville*. 223
Sur l'intégration de la différentielle $\frac{x + A}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}} dx$; par M. *P. Tchébichef*. 225
Sur l'intégration des différentielles irrationnelles; par M. *P. Tchébichef*. 242
Prix proposés par l'Académie de Berlin. 247
Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; par M. *J. Liouville*. (Treizième article.). 249
Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)$; par M. *J. Liouville*. 257
Sur la forme $x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$; par M. *J. Liouville*. 273
Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; par M. *J. Liouville*. (Quatorzième article.). 281
Remarque sur le développement de $\cos am x$; par M. *Hermite*. 289
Extrait d'une Lettre adressée à M. *Besge*; par M. *J. Liouville*. 296
Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2$; par M. *J. Liouville*. 299
Sur quelques formules relatives au module dans la théorie des fonctions elliptiques; par M. *Hermite*. 313
Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; par M. *J. Liouville*. (Quinzième article.). 321
Passages relatifs à des sommations de séries de cubes, extraits de manuscrits arabes inédits et traduits par M. *F. Wœpcke*. 337
Énoncés de quelques théorèmes sur la possibilité de l'équation $x^2 - Ny^2 = -1$ en nombres entiers. (Lettre adressée à M. *Liouville* par M. *Casimir Richaud*.). 384
Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; par M. *J. Liouville*. (Seizième article.). 389
Lettre de M. *de la Gournerie* sur les passages de son *Traité de Géométrie descriptive* qui peuvent le plus intéresser les géomètres, adressée à M. *Liouville*. 401
Sur la forme $x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2$; par M. *J. Liouville*. 421

ERRATA.

Page 11, ligne 13, *au lieu de* $\left(\frac{\partial}{3}\right)$, *lisez* $\left(\frac{\partial}{5}\right)$.

Page 268, ligne 18, *au lieu de* N, *lisez* $\mathfrak{N}$.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2;$$

Par M. J. LIOUVILLE.

---

1. Étant donné un entier n quelconque, on demande le nombre

$$\mathrm{N}(n)$$

des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2,$$

c'est-à-dire le nombre

$$\mathrm{N}(n)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs. Nous écrivons, comme on voit, pour abréger,

$$\mathrm{N}(n)$$

au lieu de

$$\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2).$$

La forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2$$

étant la seule dont nous voulions parler ici, cette simplification n'amènera aucune équivoque.

Comme les nombres premiers 2 et 5, quand ils divisent n, jouent un rôle tout spécial dans la formule qui détermine $N(n)$, nous poserons

$$n = 2^\alpha 5^\beta m,$$

m étant un entier impair non divisible par 5, et les exposants α, β pouvant se réduire à zéro.

Eisenstein s'est occupé en 1847 (*Journal de Crelle*, t. XXXV, p. 134) du cas particulier de $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $n = m$, c'est-à-dire du cas particulier où l'on ne considère qu'un entier impair, non divisible par 5. La règle qu'il donne sans démonstration pour trouver $N(m)$ consiste à chercher l'excès de la somme des diviseurs de m qui sont résidus quadratiques de 5 sur celle des diviseurs de m qui sont au contraire non résidus. On en conclut la valeur de $N(m)$, en multipliant cet excès (qui est tantôt positif, tantôt négatif) par 6 ou par -4, suivant que m est ou n'est pas résidu quadratique de 5.

Désignons par d un quelconque des diviseurs de m (1 et m compris). On a, conformément à une notation de Legendre aujourd'hui adoptée partout,

$$\left(\frac{d}{5}\right) = 1$$

quand d est résidu quadratique de 5, tandis que

$$\left(\frac{d}{5}\right) = -1$$

quand d est non résidu. D'ailleurs les entiers impairs, premiers à 5 et résidus quadratiques de 5, sont tous de la forme

$$10k \pm 1,$$

tandis que les entiers impairs, premiers à 5 et non résidus quadra-

tiques de 5, sont fournis par la formule

$$10k \pm 3.$$

La règle d'Eisenstein revient donc aux équations ci-après :

$$N(m) = 6 \sum \left(\frac{d}{5}\right) d$$

quand $m = 10k \pm 1$; mais

$$N(m) = -4 \sum \left(\frac{d}{5}\right) d$$

quand $m = 10k \pm 3$. Le signe sommatoire porte naturellement sur les diviseurs d.

On peut substituer à la fonction

$$\sum \left(\frac{d}{5}\right) d$$

une autre fonction numérique de même valeur absolue, mais qui a l'avantage d'exprimer toujours un nombre positif. Soit δ le quotient de m par d, en sorte que $m = d\delta$. La fonction numérique dont je veux parler sera

$$\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

On a, en effet,

$$\left(\frac{\delta}{5}\right) = \left(\frac{d}{5}\right)$$

quand $m = 10k \pm 1$, et

$$\left(\frac{\delta}{5}\right) = -\left(\frac{d}{5}\right)$$

quand $m = 10k \pm 3$.

Ainsi

$$N(m) = 6 \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d,$$

pour $m = 10k \pm 1$; et

$$N(m) = 4 \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d,$$

pour $m = 10k \pm 3$. On bien encore on a généralement

$$(1) \qquad N(m) = \left[5 + \left(\frac{m}{5}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

L'équation (1) résume tout ce que l'on doit à Eisenstein, relativement au sujet qui nous occupe.

La somme représentée par

$$\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d$$

s'exprime aussi par un produit. Soient a, b,..., les facteurs premiers dont m est composé, en sorte que l'on ait

$$m = a^{\mu} b^{\nu} \ldots;$$

le produit dont je parle pourra s'écrire

$$\prod \left[a^{\mu} + \left(\frac{a}{5}\right) a^{\mu-1} + a^{\mu-2} + \left(\frac{a}{5}\right) a^{\mu-3} + \ldots\right].$$

Je ne pense pas que la notation dont je me sers ici, et que j'ai déjà employée ailleurs, ait besoin d'être expliquée, ni qu'il soit nécessaire d'ajouter que pour $m = 1$ la valeur du produit dont il s'agit est supposée aussi égale à 1.

On voit par cette expression en produit que la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d$$

est essentiellement > 0, quel que soit l'entier m.

Il est bon enfin de faire observer que l'on pourrait remplacer la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d$$

par celle-ci

$$\sum \left(\frac{5}{\delta}\right) d,$$

où l'on donne au signe de Legendre la signification nouvelle et plus étendue que lui attribue Jacobi. Par là on mettrait mieux en évidence

certaines analogies que nous développerons une autre fois; mais pour le moment nous conserverons la formule (1) telle que nous l'avons écrite.

En y prenant successivement

$$m = 1, \quad m = 3, \quad m = 7, \quad m = 9, \quad \text{etc.},$$

cette formule donne

$$N(1) = 6, \quad N(3) = 8, \quad N(7) = 24, \quad N(9) = 42, \quad \text{etc.},$$

résultats dont l'exactitude est aisée à vérifier. Mais je ne veux pas insister sur ces calculs numériques.

2. En m'occupant à mon tour de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2,$$

j'ai naturellement cherché d'abord à constater au moyen de mes *formules générales* l'exactitude de l'équation (1); puis, cela fait, j'ai considéré les entiers qu'Eisenstein a laissés de côté et qui offraient des difficultés spéciales à cause du facteur premier 2, ou du facteur premier 5, ou de ces deux facteurs premiers réunis.

J'ai réussi par deux méthodes différentes à me débarrasser des difficultés provenant du facteur 5. En effet, tout entier n divisible par 5 peut être mis sous la forme

$$5^\beta q,$$

q étant premier à 5. Or je trouve que l'on a

$$N(5^\beta q) = \frac{1}{6}(5^{\beta+1} + 1)\, N(q)$$

quand

$$q \equiv \pm 1 \pmod{5};$$

et

$$N(5^\beta q) = \frac{1}{4}(5^{\beta+1} - 1)\, N(q)$$

quand

$$q \equiv \pm 3 \pmod{5}.$$

On peut comprendre ces deux équations en une seule, en écrivant que

$$(2) \qquad N(5^\beta q) = \frac{5^{\beta+1} + \left(\frac{q}{5}\right)}{5 + \left(\frac{q}{5}\right)} N(q).$$

L'équation (2) subsisterait, mais deviendrait purement identique, si l'on y faisait $\beta = 0$.

Lorsque q se réduit à un entier impair m, la valeur de $N(q)$ ou de $N(m)$ est fournie par l'équation (1). La combinaison des équations (1) et (2) conduit donc à cette formule remarquable

$$(3) \qquad N(5^\beta m) = \left[5^{\beta+1} + \left(\frac{m}{5}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d,$$

laquelle reste exacte même pour $\beta = 0$, puisqu'alors elle coïncide avec l'équation (1).

En y prenant $m = 1$, $\beta = 1$, on en conclut

$$N(5) = 26;$$

or cela est vérifié par les équations

$$5 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 5(\pm 1)^2$$

et

$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 5.0^2,$$

qui donnent pour l'entier 5 vingt-six représentations en opérant dans la seconde d'entre elles les permutations convenables.

Pour $m = 3$, $\beta = 1$, il viendrait

$$N(15) = 48.$$

Or il y a en effet quarante-huit représentations de l'entier 15 par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2;$$

elles résultent naturellement de l'identité

$$15 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 5(\pm 1)^2.$$

Mais quand q est pair, en sorte que

$$q = 2^{\alpha} m,$$

m étant impair (et premier à 5, comme q), la valeur de $N(q)$, ou plutôt de $N(2^{\alpha} m)$ reste à trouver. Voici comment nous l'obtiendrons.

5. Soit d'abord $\alpha = 1$, en sorte qu'il s'agisse d'un entier impairement pair.

Je trouve que

$$N(2m) = 12 \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d$$

quand

$$m = 10k \pm 1,$$

tandis que

$$N(2m) = 18 \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d$$

quand

$$m = 10k \pm 3.$$

Ces deux équations sont, du reste, comprises dans l'équation unique

$$(4) \qquad N(2m) = 3\left[5 - \left(\frac{m}{5}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

Pour aller plus loin dans la série des puissances de 2, on distinguera le cas de α impair ($\alpha = 2\gamma + 1$) du cas de α pair ($\alpha = 2\gamma + 2$). On a, je m'en suis assuré,

$$(5) \qquad N(2^{2\gamma+1} m) = \frac{2^{2\gamma+2} + 5}{9} N(2m)$$

et

$$(6) \qquad N(2^{2\gamma+2} m) = \frac{2^{2\gamma+3} - 5}{3} N(m).$$

On peut faire $\gamma = 0$ dans ces deux équations. Alors l'équation (5) devient identique, et l'équation (6) donne

$$N(4m) = N(m),$$

résultat qu'on pouvait facilement prévoir *à priori*.

En portant dans l'équation (5) la valeur de $N(2m)$ fournie par l'équation (4), et dans l'équation (6) la valeur de $N(m)$ fournie par l'équation (1), on obtient respectivement

$$N(2^{2\gamma+1}m) = \frac{1}{3}\left[5 - \left(\frac{m}{5}\right)\right](2^{2\gamma+2} + 5)\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d$$

et

$$N(2^{2\gamma+2}m) = \frac{1}{3}\left[5 + \left(\frac{m}{5}\right)\right](2^{2\gamma+3} - 5)\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d,$$

formules que je réunis en une seule en écrivant, sous la condition de $\alpha > 0$,

$$(7)\quad N(2^{\alpha}m) = \frac{1}{3}\left[5 + (-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)\right]\left[2^{\alpha+1} - (-1)^{\alpha}.5\right]\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d.$$

Maintenant combinez la formule (7) avec la formule (2) où vous ferez $q = 2^{\alpha}m$, observez d'ailleurs que

$$\left(\frac{2^{\alpha}m}{5}\right) = (-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right),$$

et vous obtiendrez, pour tous les nombres pairs, la formule que voici :

$$(8)\quad N(2^{\alpha}5^{\beta}m) = \frac{1}{3}\left[5^{\beta+1} + (-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)\right]\left[2^{\alpha+1} - (-1)^{\alpha}.5\right]\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d.$$

On peut, dans la formule (8), faire $\beta = 0$, mais non pas $\alpha = 0$. Le cas de $\alpha = 0$ est résolu par la formule (3) dans laquelle la valeur $\beta = 0$ est admissible comme toute autre valeur. Les formules (3) et (8) résolvent complétement la question que nous nous étions proposée.

4. Nous venons de déterminer le nombre total

$$N(n)$$

des solutions propres ou impropres de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2.$$

Ajoutons quelques mots relativement au nombre

$$M(n)$$

des solutions *propres*, pour lesquelles les indéterminées x, y, z, t ne doivent avoir aucun facteur commun > 1.

Posons comme ci-dessus

$$n = 2^{\alpha} 5^{\beta} m,$$

m étant impair et premier à 5; mais au lieu de la fonction numérique de m exprimée par la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d$$

ou par le produit

$$\prod \left[a^{\mu} + \left(\frac{a}{5}\right) a^{\mu-1} + a^{\mu-2} + \left(\frac{a}{5}\right) a^{\mu-3} + \ldots\right]$$

relatif aux facteurs premiers de m, introduisons celle-ci :

$$\prod \left[a^{\mu} + \left(\frac{a}{5}\right) a^{\mu-1}\right].$$

En faisant

$$N(2^{\alpha} 5^{\beta} m) = G(\alpha, \beta, m) \prod \left[a^{\mu} + \left(\frac{a}{5}\right) a^{\mu-1}\right],$$

on trouvera sans peine, suivant les cas divers qui peuvent se présenter, la valeur de

$$G(\alpha, \beta, m).$$

Soit d'abord $\alpha = 0$, puis distinguons les cas de $\beta = 0$, $\beta = 1$, $\beta > 1$. On a

$$G(0, 0, m) = 5 + \left(\frac{m}{5}\right), \quad G(0, 1, m) = 25 + \left(\frac{m}{5}\right);$$

et, pour $\beta > 1$,

$$G(0, \beta, m) = 24.5^{\beta-1}.$$

Soit ensuite $\alpha = 1$, puis successivement $\beta = 0$, $\beta = 1$, $\beta > 1$.

On a

$$G(1, 0, m) = 3\left[5 - \left(\frac{m}{5}\right)\right], \quad G(1, 1, m) = 3\left[25 - \left(\frac{m}{5}\right)\right];$$

enfin, pour $\beta > 1$,

$$G(1, \beta, m) = 72.5^{\beta-1}.$$

Quand $\alpha = 2$, il n'y a pas de solutions propres. Ainsi

$$M(4.5^{\beta} m) = 0,$$

quel que soit l'exposant β. En effet, l'équation

$$4.5^{\beta} m = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2$$

ne peut avoir lieu qu'en prenant pour x, y, z, t des entiers pairs, par conséquent des entiers affectés du facteur commun 2.

En dernier lieu, soit $\alpha > 2$, et successivement $\beta = 0$, $\beta = 1$, $\beta > 1$. On aura

$$G(\alpha, 0, m) = 2^{\alpha-1}\left[5 + (-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)\right]$$

et

$$G(\alpha, 1, m) = 2^{\alpha-1}\left[25 + (-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)\right];$$

mais, pour $\beta > 1$,

$$G(\alpha, \beta, m) = 3.2^{\alpha+2}.5^{\beta-1}.$$

La question proposée est donc résolue. Le cas de $\alpha = 0$, $\beta = 0$ a été traité par Eisenstein à l'endroit déjà cité du *Journal de Crelle*. Notre solution s'accorde alors avec la sienne. Les autres cas sont discutés ici pour la première fois.

5. Exigeons à présent que dans les représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2,$$

on n'admette plus pour x, y, z, t que des valeurs impaires et posi-

tives. Quel sera, dans ces conditions nouvelles, le nombre total

$$\mathfrak{N}(n)$$

des représentations propres ou impropres? Il est évident qu'on aura

$$\mathfrak{N}(n) = 0$$

si n n'est pas multiple de 8. Mais quelle sera la valeur de

$$\mathfrak{N}(8.2^{\varepsilon}5^{\beta}m),$$

m étant un entier impair, premier à 5, et les exposants ε, β ayant des valeurs quelconques, la valeur 0 comprise?

Je réponds à cette question par l'équation suivante, bien facile à établir,

$$\mathfrak{N}(8.2^{\varepsilon}5^{\beta}m) = \frac{1}{16}\left[\mathrm{N}(2^{\varepsilon+3}5^{\beta}m) - \mathrm{N}(2^{\varepsilon+1}5^{\beta}m)\right],$$

de laquelle on déduit, d'après ce qui a été dit ci-dessus,

$$\mathfrak{N}(8.2^{\varepsilon}5^{\beta}m) = 2^{\varepsilon-2}\left[5^{\beta+1} - (-1)^{\varepsilon}\left(\frac{m}{5}\right)\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d.$$

Si, tout en continuant à exiger pour x, y, z, t des valeurs impaires et positives, on ne demandait que le nombre

$$\mathfrak{M}(8.2^{\varepsilon}5^{\beta}m)$$

des représentations propres, il faudrait distinguer les trois cas de $\beta = 0$, $\beta = 1$, $\beta > 1$. La fonction

$$\Pi\left[a^{\mu} + \left(\frac{a}{5}\right)a^{\mu-1}\right]$$

reparaîtrait. On a, en effet,

$$\mathfrak{M}(8.2^{\varepsilon}m) = 2^{\varepsilon-2}\left[5 - (-1)^{\varepsilon}\left(\frac{m}{5}\right)\right]\Pi\left[\left(a^{\mu} + \left(\frac{a}{5}\right)a^{\mu-1}\right]\right.,$$

puis

$$\mathfrak{M}(8.2^{\varepsilon}5m) = 2^{\varepsilon-2}\left[25 - (-1)^{\varepsilon}\left(\frac{m}{5}\right)\right]\prod\left[\left(a^{\mu} + \left(\frac{a}{5}\right)a^{\mu-1}\right]:$$

enfin, pour $\beta > 1$,

$$\mathfrak{M}(8.2^{\varepsilon}5^{\beta}m) = 3.2^{\varepsilon+1}5^{\beta-1}\prod\left[a^{\mu} + \left(\frac{a}{5}\right)a^{\mu-1}\right].$$

Je crois pouvoir me dispenser d'ajouter des exemples.

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2;$$

Par M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n, on demande le nombre

$$\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2)$$

des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2,$$

ou, ce qui revient au même, des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2,$$

dans laquelle x, y, z, t sont des entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs.

Il nous sera bien facile de répondre à cette question si l'on regarde comme connu, d'après l'article qui précède, le nombre

$$\mathrm{N}(2n)$$

des solutions de l'équation

$$2n = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2.$$

Je me suis assuré en effet, et il est d'ailleurs bien facile de voir que le nombre demandé

$$\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2)$$

est égal à

$$\frac{1}{3}[2 + (-1)^n]\,\mathrm{N}(2n),$$

c'est-à-dire est égal à

$$\frac{1}{3}\mathrm{N}(2n)$$

quand n est impair, mais égal à

$$\mathrm{N}(2n)$$

quand n est pair.

Si donc on pose, comme dans l'article précédent,

$$n = 2^{\alpha} 5^{\beta} m,$$

m étant impair et premier à 5, et si l'on forme la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$, on verra, en distinguant le cas de n pair du cas de n impair, que

$$\mathrm{N}(5^{\beta} m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2)$$

est égal à

$$\left[5^{\beta+1} - \left(\frac{m}{5}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d,$$

tandis que, s'il s'agit d'un entier pair, c'est-à-dire du cas de $\alpha > 0$,

$$\mathrm{N}(2^{\alpha} 5^{\beta} m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2)$$

s'exprime par

$$\frac{1}{3}\left[5^{\beta+1} - (-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)\right]\left[2^{\alpha+2} + (-1)^{\alpha}.5\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

On admet pour β la valeur zéro comme toute autre valeur. Ainsi

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2)$$

est égal à

$$\left[5 - \left(\frac{m}{5}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d;$$

et, sous la condition de $\alpha > 0$,

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2)$$

est égal à

$$\frac{1}{3}\left[5 - (-1)^\alpha\left(\frac{m}{5}\right)\right]\left[2^{\alpha+2} + (-1)^\alpha . 5\right]\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d.$$

2. On peut désirer aussi d'avoir séparément le nombre

$$M(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2)$$

des solutions propres de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2.$$

Pour former ce nombre, représentons-le par

$$H(\alpha, \beta, m)\prod\left[a^\mu + \left(\frac{a}{5}\right)a^{\mu-1}\right],$$

l'entier donné n l'étant lui-même par

$$2^\alpha 5^\beta m,$$

où m est impair et premier à 5. Le produit

$$\prod\left[a^\mu + \left(\frac{a}{5}\right)a^{\mu-1}\right],$$

déjà employé dans l'article précédent, est relatif aux facteurs premiers de m, μ désignant l'exposant de chacun de ces facteurs a dans l'expression de m. Voici quelle sera, suivant les divers cas, la valeur du coefficient

$$H(\alpha, \beta, m).$$

Occupons-nous d'abord des nombres impairs, pour lesquels $\alpha = 0$. On a

$$H(0, 0, m) = 5 - \left(\frac{m}{5}\right)$$

et

$$H(0, 1, m) = 25 - \left(\frac{m}{5}\right);$$

mais, pour $\beta > 1$,

$$H(0, \beta, m) = 24.5^{\beta-1}.$$

Passons aux entiers impairement pairs, c'est-à-dire au cas de $\alpha = 1$. On a

$$H(1, 0, m) = 5 + \left(\frac{m}{5}\right)$$

et

$$H(1, 1, m) = 25 + \left(\frac{m}{5}\right);$$

mais, pour $\beta > 1$,

$$H(1, \beta, m) = 24.5^{\beta-1}.$$

Quand $\alpha = 2$, on a successivement

$$H(2, 0, m) = 6\left[5 - \left(\frac{m}{5}\right)\right],$$

puis

$$H(2, 1, m) = 6\left[25 - \left(\frac{m}{5}\right)\right],$$

et, pour $\beta > 1$,

$$H(2, \beta, m) = 144.5^{\beta-1}.$$

Soit enfin $\alpha > 2$. Je trouve alors

$$H(\alpha, 0, m) = 2^{\alpha}\left[5 - (-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)\right],$$

et

$$H(\alpha, 1, m) = 2^{\alpha}\left[25 - (-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)\right],$$

mais, pour $\beta > 1$,

$$H(\alpha, \beta, m) = 3.2^{\alpha+3}5^{\beta-1}.$$

SUR LA FORME

$$x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2);$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre des représentations d'un entier donné, par la forme

$$x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2)$$

dont nous voulons nous occuper ici, n'offre pas de très-grandes difficultés quand on regarde comme connu pour tout entier n le nombre

$$\mathrm{N}(n)$$

des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2$$

que nous avons étudiée dans les premières pages de ce cahier.

Et d'abord, s'il s'agit d'un multiple de 5, on a évidemment

$$\mathrm{N}(5n = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2) = \mathrm{N}(n).$$

En effet l'équation

$$5n = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2$$

exige que x soit multiple de 5; il faut donc faire

$$x = 5x_1,$$

et alors l'équation proposée se change en celle-ci

$$n = y^2 + z^2 + t^2 + 5x_1^2$$

dont le nombre de solutions est précisément $\mathrm{N}(n)$.

S'il s'agit d'un entier non multiple de 5, cet entier sera de l'une des deux formes

$$5g \pm 1, \quad 5g \pm 3.$$

Quand il est de la forme

$$5g \pm 3,$$

on a

$$N(5g \pm 3 = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 0;$$

car l'équation

$$5g \pm 3 = x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2)$$

est impossible, puisque le second membre est résidu quadratique de 5 et le premier non résidu.

Pour les entiers de la forme

$$5g \pm 1.$$

la question est plus délicate. J'ai réussi néanmoins à la résoudre, en démontrant que

$$N(5g \pm 1 = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2) = \frac{1}{3} N(5g \pm 1).$$

On voit que la fonction $N(n)$ suffit toujours.

2. Entrons pourtant dans le détail de quelques cas particuliers, en laissant de côté les entiers multiples de 5 ou non résidus quadratiques de 5.

Considérons d'abord un entier impair de la forme

$$10k \pm 1,$$

et, après avoir décomposé $10k \pm 1$ de toutes les manières possibles en deux facteurs d, δ, introduisons la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

L'expression explicite de

$$N(10k \pm 1 = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2)$$

sera

$$2\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d.$$

Pour l'entier 1, par exemple, c'est-à-dire pour l'équation

$$1 = x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2),$$

on n'aura que deux solutions : elles répondent à

$$x = \pm 1, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t = 0.$$

Mais pour l'entier 9, le nombre des solutions deviendra égal à quatorze; les identités

$$\begin{aligned}
9 &= (\pm 3)^2 + 5(0^2 + 0^2 + 0^2),\\
9 &= (\pm 2)^2 + 5[(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2],\\
9 &= (\pm 2)^2 + 5[0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2],\\
9 &= (\pm 2)^2 + 5[0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2]
\end{aligned}$$

confirment ce fait.

Qu'il s'agisse à présent d'un entier pair de la forme

$$2^{27}(10k \pm 1),$$

c'est-à-dire d'un entier pair égal au produit de $10k \pm 1$ par une puissance de 4. La valeur de

$$N\left[2^{27}(10k \pm 1) = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2\right]$$

sera

$$\frac{2}{3}(2^{27+1} - 5)\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d,$$

la somme

$$\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d$$

se rapportant aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $10k \pm 1 = d\delta$. Pour l'entier 4, par exemple, c'est-à-dire pour l'équation

$$4 = x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2),$$

il n'y aura que deux solutions : elles répondent à

$$x = \pm 2, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t = 0.$$

Mais pour l'entier 4.9 ou 36, il y en aura quatorze, ce qu'on vérifie aisément. Pour l'entier 16, il y en aura dix-huit. C'est ce que confirment les identités

$$16 = (\pm 4)^2 + 5(0^2 + 0^2 + 0^2)$$

et

$$16 = (\pm 1)^2 + 5[(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2],$$

la première fournissant deux solutions et la seconde en donnant seize.

Soit enfin un entier pair de la forme

$$2^{2\gamma+1}(10k \pm 3).$$

Après avoir posé de toutes les manières possibles

$$10k \pm 3 = d\delta$$

et calculé la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d$$

relative aux groupes d, δ ainsi définis, nous verrons que la valeur de

$$N\left[2^{2\gamma+1}(10k \pm 3) = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2\right]$$

s'exprime par

$$\frac{2}{3}(2^{2\gamma+2} + 5) \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

Ainsi pour l'entier $6 = 2.3$, c'est-à-dire pour l'équation

$$6 = x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2),$$

il doit y avoir douze solutions. C'est ce que confirment les identités

$$6 = (\pm 1)^2 + 5[(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2],$$
$$6 = (\pm 1)^2 + 5[0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2],$$
$$6 = (\pm 1)^2 + 5[0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2].$$

5. Je ne m'arrêterai pas à la recherche du nombre des représentations *propres* d'un entier donné, par la forme

$$x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2),$$

non que cette recherche soit difficile, mais elle nous entraînerait dans des détails fastidieux, parce qu'il faudrait distinguer beaucoup de cas différents. Mais je dirai deux mots d'une autre question, qui n'est pas sans intérêt.

Exigeons donc à présent que les entiers x, y, z, t soient impairs et positifs, puis cherchons quel sera, sous cette condition, le nombre des représentations d'un entier donné n. Laissons de côté les deux cas faciles de n multiple de 5 et de n non résidu quadratique de 5. Supposons aussi n multiple de 8, car sans cela il n'y a aucune représentation de n sous la forme voulue. Nous n'aurons dès lors à faire que les deux hypothèses suivantes

$$n = 8.2^{2\gamma+1}(10k \pm 1),$$

ou bien

$$n = 8.2^{2\gamma}(10k \pm 3);$$

on admet pour γ la valeur zéro. Pour arriver au but, il faudra encore se servir de la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d,$$

relative dans le premier cas aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $10k \pm 1 = d\delta$, tandis que dans le second d et δ appartiennent à l'entier $10k \pm 3$.

Pour

$$n = 8.2^{2\gamma+1}(10k \pm 1),$$

le nombre demandé sera exprimé par

$$2^{2\gamma} \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d;$$

et pour

$$n = 8.2^{2\gamma}(10k \pm 3),$$

il est égal à

$$2^{2\gamma-1} \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

Ainsi, par exemple, l'équation

$$16 = x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2),$$

quand on y prend x, y, z, t impairs et positifs, n'a qu'une solution : elle est fournie par l'identité

$$16 = 1^2 + 5(1^2 + 1^2 + 1^2).$$

Pour l'entier 24, c'est-à-dire pour l'équation

$$8.3 = x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2),$$

où x, y, z, t sont de même impairs et positifs, on ne trouve de même qu'une solution. C'est l'identité

$$24 = 3^2 + 5(1^2 + 1^2 + 1^2)$$

qui la donne cette fois.

SUR LA FORME
$2x^2 + 2xy + 3y^2 + 5z^2 + 5t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n, on demande une méthode facile pour le calcul du nombre

$$N(n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 5z^2 + 5t^2)$$

des représentations de n par la forme

$$2x^2 + 2xy + 3y^2 + 5z^2 + 5t^2,$$

c'est-à-dire du nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 5z^2 + 5t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

La réponse à cette question sera très-simple si l'on veut admettre comme bien compris ce qui a été dit, dans l'article précédent, concernant la forme

$$x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2).$$

2. En effet, quand n est impair, la valeur demandée de

$$N(n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 5z^2 + 5t^2)$$

est égale à

$$\frac{1}{3} N(2n = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2),$$

tandis que pour n pair elle est égale à

$$N(2n = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2).$$

En d'autres termes les deux quantités

$$[2 + (-1)^{n+1}]\,\mathrm{N}(n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 5z^2 + 5t^2$$

et

$$\mathrm{N}(2n = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2)$$

sont toujours égales entre elles.

La valeur de

$$\mathrm{N}(2n = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2)$$

ayant été donnée ci-dessus pour tous les cas qui peuvent se présenter, ces quelques mots suffisent pour résoudre la question nouvelle à laquelle ce dernier article est consacré.

SOLUTION

De divers problèmes de Mécanique, dans lesquels les conditions imposées aux extrémités des corps, au lieu d'être invariables, sont des fonctions données du temps, et où l'on tient compte de l'inertie de toutes les parties du système;

PAR M. PHILLIPS.

J'ai traité ces problèmes par deux procédés. L'un d'eux est appliqué dans le premier chapitre et l'autre dans le second.

CHAPITRE PREMIER.

PROBLÈME I.

Déterminer le mouvement moléculaire de toutes les parties d'une tige, dont une extrémité reçoit un mouvement donné, l'autre étant libre, et où chaque point se meut parallèlement à l'axe de cette tige.

Soit x la distance d'une tranche quelconque de cette tige à un point fixe pris sur l'axe, dans l'état de repos de celle-ci, quand elle n'est soumise à aucune force, et soit u ce qu'est devenu x dans le mouvement, au bout du temps t. L'allongement proportionnel est $\frac{du}{dx} - 1$.

Soient E le coefficient d'élasticité et ϖ le poids de l'unité de volume de la substance. L'équation aux différences partielles est

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{Eg}{\varpi} \frac{d^2 u}{dx^2} \tag{1}$$

ou

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = k^2 \frac{d^2 u}{dx^2}, \tag{2}$$

en faisant

$$\frac{Eg}{\varpi} = k^2. \tag{3}$$

L'intégrale générale de l'équation (2) est

$$u = f(x + kt) + F(x - kt), \tag{4}$$

f et F désignant deux fonctions arbitraires.

Il s'agit de déterminer directement les deux fonctions qui entrent dans la valeur de u. Je les désigne d'une manière générale par $f(\zeta)$ et $F(\zeta)$, et elles ont besoin d'être connues : 1° $f(\zeta)$ de $\zeta = 0$ à $\zeta = +\infty$, et 2° $F(\zeta)$ de $\zeta = l$ à $\zeta = -\infty$.

On a d'abord ces deux fonctions de $\zeta = 0$ à $\zeta = +l$, d'après l'état initial, et on les obtient ensuite pour toutes les autres valeurs de la variable, d'après les conditions assignées pour les extrémités.

L'état initial est donné de telle façon que, pour $t = 0$, on ait

$$u = \varphi(x) \tag{5}$$

et

$$\frac{du}{dt} = \psi(x). \tag{6}$$

Il faut donc qu'on ait, à cause de l'équation (4),

$$f(x) + F(x) = \varphi(x) \tag{7}$$

et

$$kf'(x) - kF'(x) = \psi(x)$$

ou, en intégrant cette dernière relation,

$$f(x) - F(x) = \frac{1}{k}\Psi(x), \tag{8}$$

en désignant par $\Psi(x)$ l'intégrale $\int \psi(x)\,dx$.

Il est inutile de tenir compte de la constante de cette intégrale, car elle disparaîtrait dans la valeur (4) de u.

On a donc

$$\Psi(x) = \int \psi(x)\,dx. \tag{9}$$

On déduit des équations (7) et (8)

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2k}\Psi(x) \tag{10}$$

et

$$F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2k}\Psi(x), \tag{11}$$

ou, en désignant d'une manière générale par ζ la variable, on a

$$f(\zeta) = \frac{1}{2}\varphi(\zeta) + \frac{1}{2k}\Psi(\zeta), \tag{12}$$

$$F(\zeta) = \frac{1}{2}\varphi(\zeta) - \frac{1}{2k}\Psi(\zeta). \tag{13}$$

Comme $\varphi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$ et par suite $\varphi(\zeta)$ et $\Psi(\zeta)$ sont données pour toutes les valeurs positives de la variable comprises entre o et l, il en résulte que $f(\zeta)$ et $F(\zeta)$ sont connues pour toutes les valeurs positives de la variable comprises entre o et l. Il reste à trouver ce qu'est $f(\zeta)$ de $\zeta = l$ à $\zeta = +\infty$, et ce qu'est $F(\zeta)$ de $\zeta = 0$ à $\zeta = -\infty$.

La suite des opérations dépend des conditions imposées aux extrémités.

Supposons donc que le mouvement imprimé à l'origine de la tige, répondant à $x = 0$, soit représenté par l'équation

$$u = \xi_0(t), \tag{14}$$

$\xi_0(t)$ étant une fonction donnée du temps. L'autre extrémité de la tige étant entièrement libre, on a

$$\frac{du}{dx} - 1 = 0 \quad \text{pour} \quad x = l. \tag{15}$$

Pour que l'équation (4) satisfasse à ces conditions, il faut qu'on ait,

quel que soit t,

$$f(kt) + F(-kt) = \xi_0(t)$$

et

$$f'(l + kt) + F'(l - kt) = 1$$

ou, en faisant

$$kt = \zeta,$$

(16)
$$f(\zeta) + F(-\zeta) = \xi_0\left(\frac{\zeta}{k}\right)$$

et

$$f'(l + \zeta) + F'(l - \zeta) = 1,$$

$f'(\quad)$ et $F'(\quad)$ désignent les dérivées des fonctions correspondantes.

On peut en intégrant remplacer cette dernière équation par

$$f(l + \zeta) - F(l - \zeta) = \zeta + C.$$

Pour déterminer la constante C, il suffit de faire $\zeta = 0$, et l'on a

$$C = f(l) - F(l),$$

ou, à cause de l'équation (8),

$$C = \frac{1}{k}\Psi(l).$$

On doit donc avoir définitivement, quel que soit ζ,

(17)
$$f(\zeta) + F(-\zeta) = \xi_0\left(\frac{\zeta}{k}\right)$$

et

(18)
$$f(l + \zeta) - F(l - \zeta) = \zeta + \frac{1}{k}\Psi(l).$$

Tout résulte maintenant de ces deux dernieres équations.

En effet, comme $F(\zeta)$ est connue de $\zeta = 0$ à $\zeta = l$, il en est de même de $F(l - \zeta)$. Donc l'équation (18) fera connaître $f(l + \zeta)$ de $\zeta = 0$ à $\zeta = l$, ou, ce qui revient au même, $f(\zeta)$ de $\zeta = l$ à $\zeta = 2l$.

Remplaçons maintenant dans l'équation (18) ζ par $l+\zeta$ et nous aurons

$$f(2l+\zeta) = F(-\zeta) + l + \zeta + \frac{1}{k}\Psi(l)$$

ou, à cause de l'équation (17),

$$(19) \qquad f(2l+\zeta) = -f(\zeta) + l + \zeta + \xi_0\left(\frac{\zeta}{k}\right) + \frac{1}{k}\Psi(l).$$

Cette formule permet, quand on connaît $f(\zeta)$, d'obtenir $f(2l+\zeta)$ et par suite on déterminera successivement $f(\zeta)$ pour toutes les valeurs de ζ de 0 à $+\infty$.

Reste à connaître $F(\zeta)$ de $\zeta = 0$ à $\zeta = -\infty$, ou, ce qui revient au même, $F(-\zeta)$ de $\zeta = 0$ à $\zeta = +\infty$.

Or on a de suite, par l'équation (17),

$$(20) \qquad F(-\zeta) = -f(\zeta) + \xi_0\left(\frac{\zeta}{k}\right),$$

ce qui résout la question.

Cas d'un mouvement uniformément varié pour l'origine de la tige.

Je vais donner un exemple de ces calculs. Je suppose que le corps parte de sa position naturelle, chacune de ses parties étant alors en équilibre et sans vitesse initiale. J'admets de plus que l'on compte les u à partir de l'origine de la tige supposée en repos. On a alors

$$\varphi(x) = x, \quad \psi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \Psi(x) = 0$$

ou

$$(21) \qquad [\varphi(\zeta) = \zeta, \quad \Psi(\zeta) = 0].$$

Admettons que le mouvement donné qui est imposé à l'origine de la tige soit uniformément varié, de sorte que

$$\xi_0(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2$$

ou

$$(22) \qquad \xi_0\left(\frac{\zeta}{k}\right) = \frac{\gamma\zeta^2}{2k^2}.$$

Convenons de désigner par $f(\zeta)\binom{0}{l}$ et $F(\zeta)\binom{0}{l}$ ce que sont ces fonctions pour toutes les valeurs de la variable, de 0 à l inclusivement. On aura, par les équations (12) et (13),

$$f(\zeta)\binom{0}{l} = \frac{1}{2}\zeta \tag{23}$$

et

$$F(\zeta)\binom{0}{l} = \frac{1}{2}\zeta. \tag{24}$$

Remplaçant dans l'équation (18), $F(l-\zeta)$ par sa valeur connue $\frac{1}{2}(l-\zeta)$, on en tire, en conservant le genre de notation ci-dessus et observant que $\Psi(l) = 0$,

$$f(l+\zeta)\binom{0}{l} = \frac{1}{2}\zeta + \frac{1}{2}l.$$

En faisant dans cette formule

$$l+\zeta = \zeta' \quad \text{ou} \quad \zeta = \zeta' - l,$$

on a donc

$$f(\zeta')\binom{l}{2l} = \frac{1}{2}\zeta'$$

ou, d'une manière générale,

$$f(\zeta)\binom{l}{2l} = \frac{1}{2}\zeta.$$

Comme cette formule coïncide avec l'équation (23), on peut écrire en général

$$f(\zeta)\binom{0}{2l} = \frac{1}{2}\zeta. \tag{25}$$

Pour trouver les valeurs suivantes de $f(\zeta)$, remplaçons dans l'équation (19) $\zeta + 2l$ par ζ, ou ζ par $\zeta - 2l$, et nous aurons, dans le cas actuel, pour tout entier i,

$$\left\{\begin{aligned} f(\zeta)\binom{2il}{2il+2l} &= -f(\zeta-2l)\binom{2il-2l}{2il} + \zeta - l \\ &\quad + \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta-2l)^2. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Cela veut dire qu'après avoir déterminé $f(\zeta)$ pour toutes les valeurs de la variable depuis $(2i-2)l$ jusqu'à $2il$, on y remplacera ζ par $\zeta - 2l$, et substituant dans le second membre de l'équation (26), on aura $f(\zeta)$ depuis $\zeta = 2il$ jusqu'à $\zeta = (2i+2)l$.

On a ainsi

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}
f(\zeta)\binom{2l}{4l} &= \frac{1}{2}\zeta + \frac{7}{2k^2}(\zeta - 2l)^2,\\
f(\zeta)\binom{4l}{6l} &= \frac{1}{2}\zeta + \frac{7}{2k^2}(\zeta - 2l)^2 - \frac{7}{2k^2}(\zeta - 4l)^2,\\
f(\zeta)\binom{6l}{8l} &= \frac{1}{2}\zeta + \frac{7}{2k^2}(\zeta - 2l)^2 - \frac{7}{2k^2}(\zeta - 4l)^2\\
&\qquad + \frac{7}{2k^2}(\zeta - 6l)^2,\\
f(\zeta)\binom{8l}{10l} &= \frac{1}{2}\zeta + \frac{7}{2k^2}(\zeta - 2l)^2 - \frac{7}{2k^2}(\zeta - 4l)^2\\
&\qquad + \frac{7}{2k^2}(\zeta - 6l)^2 - \frac{7}{2k^2}(\zeta - 8l)^2.
\end{aligned}\right.$$

La loi est visible et elle se continue indéfiniment.

On remarque que pour la valeur de ζ, qui sert à passer d'une fonction à la suivante, ces deux fonctions et leurs premières dérivées ont, ainsi que cela devait être, la même valeur. La même chose se vérifie pour $F(\zeta)$.

Il reste à déterminer $F(\zeta)$ de $\zeta = 0$ à $\zeta = -\infty$ ou, ce qui revient au même, $F(-\zeta)$ de $\zeta = 0$ à $\zeta = +\infty$.

Or on déduit immédiatement des valeurs de l'équation (17) et des valeurs ci-dessus de $f(\zeta)$

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}
F(-\zeta)\binom{0}{2l} &= -\frac{1}{2}\zeta + \frac{7\zeta^2}{2k^2},\\
F(-\zeta)\binom{2l}{4l} &= -\frac{1}{2}\zeta + \frac{7\zeta^2}{2k^2} - \frac{7}{2k^2}(\zeta - 2l)^2,\\
F(-\zeta)\binom{4l}{6l} &= -\frac{1}{2}\zeta + \frac{7\zeta^2}{2k^2} - \frac{7}{2k^2}(\zeta - 2l)^2 + \frac{7}{2k^2}(\zeta - 4l)^2,
\end{aligned}\right.$$

$$(28)\ \text{[suite]}\quad \begin{cases} F(-\zeta)\begin{pmatrix}6l\\8l\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\zeta + \frac{\gamma\zeta^2}{2k^2} - \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta - 2l)^2 + \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta - 4l)^2 \\ \qquad\qquad - \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta - 6l)^2, \\ F(-\zeta)\begin{pmatrix}8l\\10l\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\zeta + \frac{\gamma\zeta^2}{2k^2} - \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta - 2l)^2 + \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta - 4l)^2 \\ \qquad\qquad - \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta - 6l) + \frac{\gamma}{2k^2}(\zeta - 8l)^2. \end{cases}$$

et ainsi de suite.

Il est maintenant facile de former pour un point quelconque la valeur de u.

Supposons d'abord $kt < x$, ce qui n'aura lieu que pendant un temps extrêmement petit, car k est très-grand. Alors comme $x \leqq l$, il résulte que $x + kt$ est compris entre o et $2l$ et que $x - kt$ est compris entre o et l. Il faut donc prendre pour les fonctions f et F les expressions qui répondent à $f(\zeta)\begin{pmatrix}0\\2l\end{pmatrix}$ et $F(\zeta)\begin{pmatrix}0\\l\end{pmatrix}$. Donc alors

$$u = \frac{1}{2}(x + kt) + \frac{1}{2}(x - kt)$$

ou

$$(29)\qquad u = x,$$

ce qui indique que la tranche x ne s'est pas déplacée, ce qui devait être, car k ou $\sqrt{\frac{Eg}{\varpi}}$ est précisément la vitesse du son ou, si l'on veut, la vitesse de propagation d'un ébranlement dans la substance, et $kt < x$ signifie que l'ébranlement imprimé par le mouvement à l'origine de la tige n'est pas encore parvenu jusqu'à la tranche x.

Supposons maintenant $kt > x$, mais que $kt + x$ et par conséquent aussi $kt - x$ soient plus petits que $2l$. On prendra alors $f(\zeta)\begin{pmatrix}0\\2l\end{pmatrix}$ et $F(-\zeta)\begin{pmatrix}0\\2l\end{pmatrix}$, et l'on aura

$$u = \frac{1}{2}(x + kt) - \frac{1}{2}(kt - x) + \frac{\gamma}{2k^2}(x - kt)^2$$

ou

$$(30) \qquad u = x + \frac{\gamma}{2k^2}(x - kt)^2.$$

Du reste la loi de formation permet de donner tout de suite la valeur de u pour x et t quelconques. Formons d'abord les valeurs correspondantes de $f(\zeta)$ et de $F(-\zeta)$.

Supposons donc ζ compris entre $2il$ et $2il + 2l$ et soit d'abord i pair. On somme facilement le second membre de la valeur générale de $f(\zeta)\binom{2il}{2il+2l}$, en groupant le deuxième terme et le troisième, le quatrième et le cinquième, le sixième et le septième, etc.

On a ainsi, pour i pair,

$$(31) \qquad f(\zeta)\binom{2il}{2il+2l} = \frac{1}{2}\zeta + \frac{il\gamma}{k^2}[\zeta - (i+1)l].$$

Si i est impair, on a, après les réductions,

$$(32) \qquad f(\zeta)\binom{2il}{2il+2l} = \frac{1}{2}\zeta + \frac{\gamma}{2k^2}[\zeta^2 - 2(i+1)l\zeta + 2i(i+1)l^2].$$

On obtient de même pour i pair

$$(33) \qquad F(-\zeta)\binom{2il}{2il+2l} = -\frac{1}{2}\zeta + \frac{\gamma\zeta^2}{2k^2} - \frac{il\gamma}{k^2}[\zeta - (i+1)l],$$

et pour i impair

$$(34) \qquad F(-\zeta)\binom{2il}{2il+2l} = -\frac{1}{2}\zeta + \frac{(i+1)l\gamma}{k^2}(\zeta - il).$$

Maintenant supposons $x + kt$ compris entre $2il$ et $2il + 2l$. Comme $kt - x$ en diffère de $2x$ qui est plus petit que $2l$, $kt - x$ sera compris entre $2il$ et $2il + 2l$ ou entre $2il$ et $2il - 2l$.

Dans le premier cas, on aura, si i est pair, en substituant tour à tour $x + kt$ et $kt - x$ pour ζ dans les formules précédentes,

$$(35) \qquad u = x + \frac{2il\gamma}{k^2}x + \frac{\gamma}{2k^2}(kt - x)^2.$$

Si i est impair, on aura, toujours dans le premier cas,

$$(36) \qquad u = x - \frac{2(i+1)lg}{k^2}x + \frac{g}{2k^2}(x+kt)^2.$$

Dans le second cas, on aura de même, si i est pair,

$$(37) \qquad u = x + \frac{2ilg}{k^2}(kt - il),$$

et, si i est impair,

$$(38) \qquad u = x + \frac{g}{k^2}[(x - l^2 + kt - il)^2 + (i^2 - 1)l^2].$$

Telles sont les formules très-simples qui expriment toutes les lois du mouvement. On en déduira immédiatement la vitesse $\frac{du}{dt}$ ainsi que l'allongement proportionnel $\frac{du}{dx} - 1$ pour tous les points et à une époque quelconque. Ces quantités sont données, comme on voit, sous une forme très-simple.

Il est facile de s'assurer que les équations (35), (36), (37), (38) vérifient toutes les conditions du problème.

D'abord elles satisfont toutes à l'équation aux différences partielles du second ordre (2). De plus elles vérifient les conditions imposées aux extrémités. En effet, si l'on considère l'origine de la tige qui répond à $x = 0$, ce sont les équations (35) et (36) qu'il faut prendre, car pour $x = 0$ la différence entre $kt - x$ et $kt + x$ est nulle. Or en faisant $x = 0$ dans les équations (35) et (36), elles donnent toutes deux

$$u = \frac{1}{2}gt^2.$$

Au contraire, si l'on considère l'autre extrémité de la tige qui répond à $x = l$, ce sont les équations (37) et (38) qu'il faut prendre, car, pour $x = l$, la différence entre $kt - x$ et $kt + x$ est $2l$. Or ces équations (37) et (38) donnent toutes deux

$$\frac{du}{dx} - 1 = 0 \quad \text{pour} \quad x = l.$$

On sait de plus qu'on a satisfait à l'état initial, puisqu'on a alors simplement $u = x$.

Enfin on voit que pour chaque valeur de x, la série des valeurs de u et de $\frac{du}{dt}$ ainsi que de $\frac{du}{dx}$ correspondantes à celles de t croissant indéfiniment forment une suite continue, malgré qu'il faille employer successivement les diverses formules (35), (36), (37) et (38). Cela tient à la propriété déjà démontrée des deux fonctions $f(\zeta)$ et $F(-\zeta)$ ainsi que de leurs dérivées du premier ordre qui ont chacune la même valeur pour la valeur de la variable ζ qui sert à passer de l'une quelconque d'entre elles à la suivante.

Cas d'un mouvement alternatif pour l'origine de la tige.

Supposons maintenant que l'origine de la tige soit soumise à un mouvement alternatif, comme celui qui serait donné par une manivelle, et dont la loi soit

$$(39) \qquad \xi_0(t) = r - r\cos\omega t \quad \text{ou} \quad \xi_0\left(\frac{\zeta}{k}\right) = r - r\cos\frac{\omega\zeta}{k},$$

r étant le rayon de la manivelle et ω la vitesse angulaire. L'autre extrémité de la tige est toujours supposée libre.

La même marche s'applique identiquement que dans l'exemple précédent. Je crois donc inutile de répéter tous les calculs. On trouve d'abord

$$(40) \qquad f(\zeta)\begin{pmatrix}0\\2l\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\zeta$$

et

$$(41) \qquad F(\zeta)\begin{pmatrix}0\\l\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\zeta.$$

Puis on obtient successivement, si i est pair,

$$(42) \left\{ \begin{aligned} f(\zeta)\begin{pmatrix}2il\\2il+2l\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\zeta &+ r - r\cos\frac{\omega(\zeta-2l)}{k} - r + r\cos\frac{\omega(\zeta-4l)}{k} \\ &+ r - r\cos\frac{\omega(\zeta-6l)}{k} - r + r\cos\frac{\omega(\zeta-8l)}{k} + \ldots \\ &- r + r\cos\frac{\omega(\zeta-2il)}{k}, \end{aligned} \right.$$

et, si i est impair,

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} f(\zeta)\binom{2il}{2il+2l} &= \tfrac{1}{2}\zeta + r - r\cos\frac{\omega(\zeta-2l)}{k} - r + r\cos\frac{\omega(\zeta-4l)}{k} \\ &\quad + r - r\cos\frac{\omega(\zeta-6l)}{k} - \ldots + r - r\cos\frac{\omega(\zeta-2il)}{k}. \end{aligned}\right.$$

On a ensuite, si i est pair,

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} F(-\zeta)\binom{2il}{2il+2l} &= -\tfrac{1}{2}\zeta + r - r\cos\frac{\omega\zeta}{k} - r + r\cos\frac{\omega(\zeta-2l}{k} \\ &\quad + r - r\cos\frac{\omega(\zeta-4l)}{k} - r + r\cos\frac{\omega(\zeta-6l)}{k} - \\ &\quad + r - r\cos\frac{\omega(\zeta-2il)}{k}, \end{aligned}\right.$$

et, si i est impair,

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} F(-\zeta)\binom{2il}{2il+2l} &= -\tfrac{1}{2}\zeta + r - r\cos\frac{\omega\zeta}{k} - r + r\cos\frac{\omega(\zeta-2l)}{k} \\ &\quad + r - r\cos\frac{\omega(\zeta-4l)}{k} - \ldots - r + r\cos\frac{\omega(\zeta-2il)}{k}. \end{aligned}\right.$$

Les seconds membres se réduisent très-simplement en combinant d'abord les termes deux par deux et faisant usage de la formule connue

$$(45\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin a + \sin(a+x) + \sin(a+2x) + \sin(a+3x) + \ldots \\ &\qquad\qquad + \sin(a+mx) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{m+1}{2}x\right)\sin\left(a+\frac{mx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}. \end{aligned}\right.$$

Après quelques réductions simples, on trouve, si i est pair,

$$(46)\quad f(\zeta)\binom{2il}{2il+2l} = \tfrac{1}{2}\zeta + r\,\frac{\sin\left(\frac{il\omega}{k}\right)\sin\left\{\frac{\omega}{k}[\zeta-(i+1)l]\right\}}{\cos\frac{\omega l}{k}},$$

et, pour i impair,

$$(47)\quad f(\zeta)\begin{pmatrix}2il\\2il+2l\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\zeta + r - r\,\frac{\cos\left(\frac{il\omega}{k}\right)\cos\left\{\frac{\omega}{k}[\zeta-(i+1)l]\right\}}{\cos\frac{\omega l}{k}}.$$

On a ensuite, si i est pair,

$$(48)\quad F(-\zeta)\begin{pmatrix}2il\\2il+2l\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\zeta + r - r\,\frac{\cos\frac{(i+1)l\omega}{k}\cos\frac{\omega}{k}(\zeta-il)}{\cos\frac{\omega l}{k}},$$

et, si i est impair,

$$(49)\quad F(-\zeta)\begin{pmatrix}2il\\2il+2l\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\zeta + r\,\frac{\sin\frac{(i+1)l\omega}{k}\sin\frac{\omega}{k}(\zeta-il)}{\cos\frac{\omega l}{k}}.$$

Les formules (42), (43), (44) et (45) montrent encore que les fonctions $f(\zeta)$ et $F(\zeta)$ varient d'une manière continue ainsi que les dérivées premières quand on passe de l'une quelconque d'entre elles à la suivante.

Tant que $x > kt$ et que $kt + x < 2l$, on a, comme dans l'exemple précédent,

$$u = x.$$

Quand cela n'a plus lieu, on a pour u les expressions suivantes :

$x + kt$ étant compris entre $2il$ et $2il + 2l$, $kt - x$ peut être entre les mêmes limites ou entre $2il$ et $2il - 2l$.

Dans le premier cas, on a, si i est pair,

$$(50)\quad u = x + r - r\,\frac{\sin\left\{\frac{\omega}{k}[kt-(2i+1)l]\right\}\sin\frac{\omega x}{k} + \cos(\omega t)\cos\frac{\omega}{k}(l-x)}{\cos\frac{\omega l}{k}},$$

et, si i est impair,

$$(51)\quad u = x + r - r\,\frac{\cos(\omega t)\cos\frac{\omega}{k}(l-x) - \sin\left\{\frac{\omega}{k}[kt-(2i+1)l]\right\}\sin\frac{\omega x}{k}}{\cos\frac{\omega l}{k}}.$$

Dans le second cas, on a, si i est pair,

$$(52)\qquad u = x + 2r\,\frac{\sin\left(\frac{il\omega}{k}\right)\sin\left[\frac{\omega}{k}(kt - il)\right]\cos\frac{\omega}{k}(l - x)}{\cos\frac{\omega l}{k}},$$

et, si i est impair,

$$(53)\qquad u = x + 2r - 2r\,\frac{\cos\left(\frac{il\omega}{k}\right)\cos\left[\frac{\omega}{k}(kt - il)\right]\cos\frac{\omega}{k}(l - x)}{\cos\frac{\omega l}{k}}.$$

On s'assure encore facilement :

1° Que ces quatre formules vérifient l'équation aux différences

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = k^2\,\frac{d^2 u}{dx^2};$$

2° Que les deux premières, savoir (50) et (51), donnent

$$u = r - r\cos\omega t \quad \text{pour} \quad x = 0;$$

3° Que les deux dernières, soit (52) et (53), donnent

$$\frac{du}{dx} - 1 = 0 \quad \text{pour} \quad x = l.$$

PROBLÈME II.

Voici encore un autre problème du même genre, important pour la pratique. Il est relatif à une bielle d'accouplement, et je le pose de la manière suivante :

AB *est une bielle d'accouplement,* AC *et* BD *sont deux manivelles parallèles de rayon* r, ω *est la vitesse angulaire. Soient* σ *la section de la bielle de longueur primitive,* l *et* p *son poids. Soit enfin* Q *la résistance supposée constante et appliquée en* B *tangentiellement à la circonférence* BD.

Tous les points de la bielle ont une même force centrifuge égale

à $\omega^2 r$, pour l'unité de masse, dont la résultante se partage en deux forces égales chacune à $\frac{p}{2g}\omega^2 r$, appliquées en A *et* B *suivant les manivelles, lesquelles exercent à leur tour contre la bielle des actions égales et contraires.*

Représentons donc par $\frac{p}{2g}\omega^2 r$ l'action de la manivelle BD contre la bielle, cette force s'exerçant de B vers D.

Je prends pour origine du temps l'instant où le point A passe en H, c'est-à-dire au point mort, et je suppose qu'à ce moment l'état initial soit tel, que la vitesse de tous les points de la bielle soit nulle et que celle-ci soit alors simplement en équilibre sous l'action de la force centrifuge.

En conservant les notations antérieures, cela revient à poser

$$(54) \qquad \varphi(x) = x\left(1 + \frac{p}{2E\sigma g}\omega^2 r\right),$$

$$(55) \qquad \psi(x) = 0.$$

Quant aux conditions imposées aux extrémités, elles sont que la projection du point A sur CD soit toujours à la distance $r - r\cos\omega t$ du point H, et que la force élastique au point B fasse équilibre aux composantes suivant BA de la force Q de l'action de la manivelle BD. Il faut donc qu'on ait, quel que soit t,

$$(56) \qquad u = r - r\cos\omega t \quad \text{pour} \quad x = 0,$$

et

$$(57) \qquad \frac{du}{dx} = 1 - \frac{Q}{E\sigma}\sin\omega t + \frac{p}{2E\sigma g}\omega^2 r\cos\omega t \quad \text{pour} \quad x = l.$$

On voit que les conditions choisies pour l'état initial sont compatibles avec celles imposées aux extrémités.

La vitesse initiale de tous les points de la bielle étant nulle, on sait que $f(\zeta)\begin{pmatrix}0\\l\end{pmatrix}$ ainsi que $F(\zeta)\begin{pmatrix}0\\l\end{pmatrix}$ sont toutes deux égales à $\frac{1}{2}\varphi(\zeta)$.

On a donc

$$(58)\qquad f(\zeta)\begin{pmatrix}0\\l\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\zeta\left(1 + \frac{p}{2E\sigma g}\omega^2 r\right)$$

et

$$(59)\qquad F(\zeta)\begin{pmatrix}0\\l\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\zeta\left(1 + \frac{p}{2E\sigma g}\omega^2 r\right).$$

D'ailleurs la marche générale précédemment indiquée s'applique sans difficulté. Tout se déduit toujours des relations précédentes, combinées avec celles relatives aux extrémités, et qui sont

$$(60)\quad \begin{cases} f(\zeta) + F(-\zeta) = r - r\cos\dfrac{\omega\zeta}{k} \\ \text{et}\ f'(l+\zeta) + F'(l-\zeta) = 1 - \dfrac{Q}{E\sigma}\sin\dfrac{\omega\zeta}{k} + \dfrac{p}{2E\sigma g}\omega^2 r\cos\dfrac{\omega\zeta}{k}. \end{cases}$$

Cette dernière se remplace encore par son intégrale qui est

$$(61)\quad \begin{cases} f(l+\zeta) - F(l-\zeta) = \zeta - \dfrac{Q}{E\sigma}\dfrac{k}{\omega} + \dfrac{Q}{E\sigma}\dfrac{k}{\omega}\cos\dfrac{\omega\zeta}{k} \\ \qquad + \dfrac{p}{2E\sigma g}k\omega r\sin\dfrac{\omega\zeta}{k}, \end{cases}$$

la constante étant déterminée de manière que, pour $\zeta = 0$, le second membre reproduise la valeur connue de $f(l) - F(l)$ qui est zéro.

Connaissant $F(l-\zeta)$ de $\zeta = 0$ à $\zeta = l$, puisqu'on a $F(\zeta)$ entre ces limites, on déduit de l'équation (61) $f(l+\zeta)\begin{pmatrix}0\\l\end{pmatrix}$ ou $f(\zeta)\begin{pmatrix}l\\2l\end{pmatrix}$.

De même changeant dans l'équation (61) ζ en $\zeta + l$ et y remplaçant $F(-\zeta)$ par sa valeur tirée de l'équation (60), on aura $f(2l+\zeta)$ quand on connaîtra $f(\zeta)$ ou, ce qui revient au même, on connaîtra $f(\zeta)$ quand on connaîtra $f(\zeta - 2l)$, ce qui donne ici la formule

$$(62)\quad \begin{cases} f(\zeta) = \zeta - l + r - r\cos\dfrac{\omega(\zeta-2l)}{k} - \dfrac{Q}{E\sigma}\dfrac{k}{\omega} + \dfrac{Q}{E\sigma}\dfrac{k}{\omega}\cos\dfrac{\omega(\zeta-l)}{k} \\ \qquad + \dfrac{p}{2E\sigma g}k\omega r\sin\dfrac{\omega(\zeta-l)}{k} - f(\zeta-2l). \end{cases}$$

Dans ce problème, $f(\zeta)\binom{l}{2l}$ n'a plus la même forme que $f(\zeta)\binom{0}{l}$. On l'obtient par l'équation (61), qui donne

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} f(\zeta)\binom{l}{2l} &= \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}(\zeta - 2l)\frac{p}{2E\sigma g}\omega^2 r - \frac{Q}{E\sigma}\frac{k}{\omega} \\ &\quad + \frac{Q}{E\sigma}\frac{k}{\omega}\cos\frac{\omega(\zeta - l)}{k} + \frac{p}{2E\sigma g}k\omega r\sin\frac{\omega(\zeta - l)}{k}. \end{aligned}\right.$$

A l'aide de la formule générale de l'équation (62) on déduira successivement $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$ de $f(\zeta)\binom{0}{l}$, puis $f(\zeta)\binom{4l}{5l}$ de $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$, puis $f(\zeta)\binom{6l}{7l}$ de $f(\zeta)\binom{4l}{5l}$, et ainsi de suite. De même, on obtiendra successivement, en partant de $f(\zeta)\binom{l}{2l}$, les expressions de $f(\zeta)\binom{3l}{4l}$, $f(\zeta)\binom{5l}{6l}$, $f(\zeta)\binom{7l}{8l}$, etc.

Ces résultats se réduisent très-simplement, en faisant usage de la relation déjà employée [équation (45 *bis*)] et de la suivante

$$\cos a + \cos(a + x) + \cos(a + 2x) + \ldots + \cos(a + mx) = \frac{\sin\left(\frac{m+1}{2}x\right)\cos\left(a + \frac{mx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}},$$

et l'on trouve définitivement les quatre types différents qui suivent :

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} &f(\zeta)\binom{4il}{4il+l} \\ &= \frac{1}{2}\zeta + \frac{1}{2}(\zeta - 4il)\frac{p}{2E\sigma g}\omega^2 r + r\frac{\sin\frac{2il\omega}{k}\sin\frac{\omega}{k}(\zeta - 2il - l)}{\cos\frac{\omega l}{k}} \\ &\quad - \frac{Q}{E\sigma}\frac{k}{\omega}\frac{\sin\frac{2il\omega}{k}\sin\frac{\omega}{k}(\zeta - 2il)}{\cos\frac{\omega l}{k}} \\ &\quad + \frac{p}{2E\sigma g}k\omega r\frac{\sin\frac{2il\omega}{k}\cos\frac{\omega}{k}(\zeta - 2il)}{\cos\frac{\omega l}{k}}. \end{aligned}\right.$$

$$(65)\quad \left\{\begin{aligned}
&f(\zeta)\begin{pmatrix}4il+l\\4il+2l\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{2}\zeta-\frac{1}{2}(\zeta-4il-2l)\frac{p}{2E\sigma g}\omega^2 r+r\,\frac{\sin\frac{2il\omega}{k}\sin\frac{\omega}{k}(\zeta-2il-l}{\cos\frac{\omega l}{k}}\\
&\quad-\frac{Q}{E\sigma}\frac{k}{\omega}+\frac{Q}{E\sigma}\frac{k}{\omega}\,\frac{\cos\frac{(2i+1)l\omega}{k}\cos\frac{\omega}{k}(\zeta-2il-l)}{\cos\frac{\omega l}{k}}\\
&\quad+\frac{p}{2E\sigma g}k\omega r\,\frac{\cos\frac{(2i+1)l\omega}{k}\sin\frac{\omega}{k}(\zeta-2il-l)}{\cos\frac{\omega l}{k}},
\end{aligned}\right.$$

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned}
&f(\zeta)\begin{pmatrix}4il+2l\\4il+3l\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{2}\zeta-\frac{1}{2}(\zeta-4il-2l)\frac{p}{2E\sigma g}\omega^2 r+r-r\,\frac{\cos\frac{(2i+1)l\omega}{k}\cos\frac{\omega}{k}(\zeta-2il-2l}{\cos\frac{\omega l}{k}}\\
&\quad-\frac{Q}{E\sigma}\frac{k}{\omega}+\frac{Q}{E\sigma}\frac{k}{\omega}\,\frac{\cos\frac{(2i+1)l\omega}{k}\cos\frac{\omega}{k}(\zeta-2il-l)}{\cos\frac{\omega l}{k}}\\
&\quad+\frac{p}{2E\sigma g}k\omega r\,\frac{\cos\frac{(2i+1)l\omega}{k}\sin\frac{\omega}{k}(\zeta-2il-l}{\cos\frac{\omega l}{k}}.
\end{aligned}\right.$$

$$(67)\quad \left\{\begin{aligned}
&f(\zeta)\begin{pmatrix}4il+3l\\4il+4l\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{2}\zeta+\frac{1}{2}(\zeta-4il-4l)\frac{p}{2E\sigma g}\omega^2 r+r-r\,\frac{\cos\frac{(2i+1)l\omega}{k}\cos\frac{\omega}{k}(\zeta-2il-2l)}{\cos\frac{\omega l}{k}}\\
&\quad-\frac{Q}{E\sigma}\frac{k}{\omega}\,\frac{\sin\frac{2(i+1)l\omega}{k}\sin\frac{\omega}{k}(\zeta-2il-2l)}{\cos\frac{\omega l}{k}}\\
&\quad+\frac{p}{2E\sigma g}k\omega r\,\frac{\sin\frac{2(i+1)l\omega}{k}\cos\frac{\omega}{k}(\zeta-2il-2l}{\cos\frac{\omega l}{k}}.
\end{aligned}\right.$$

On peut remarquer que les équations (64) et (65) donnent la même valeur pour $f(\zeta)$ et pour $f'(\zeta)$ quand $\zeta = 4il + l$. Il en est de même des équations (65) et (66) pour $\zeta = 4il + 2l$; de même des équations (66) et (67) pour $\zeta = 4il + 3l$, et en général pour deux fonctions consécutives pour la valeur de la variable qui sert à passer de l'une à l'autre. Cela devait être, car u, ainsi que ses dérivées du premier ordre, $\frac{du}{dt}$ et $\frac{du}{dx}$, ne peuvent varier que d'une manière continue, malgré que les fonctions (64), (65), (66), (67), etc., soient réellement discontinues ou exprimées d'une manière différente, c'est-à-dire que si l'on représentait graphiquement $f(\zeta)$, elle serait l'ordonnée d'une courbe composée d'une infinité d'arcs appartenant à des types différents, mais néanmoins se raccordant toujours tangentiellement.

La même remarque a lieu pour la fonction F, dont l'expression générale donnée par l'équation (60) est

$$(68)\quad \left\{ \begin{aligned} F(-\zeta)\binom{nl}{nl+l} &= -f(\zeta)\binom{nl}{nl+l} \\ &\quad + r - r\cos\frac{\omega\zeta}{k}, \end{aligned} \right.$$

n étant un nombre entier positif quelconque.

Avec les formules précédentes, on aura l'état de toutes les parties de la bielle à une époque quelconque. Il est facile de se rendre compte qu'on peut avoir douze combinaisons différentes. Ainsi, comme la différence entre $x + kt$ et $kt - x$, laquelle est $2x$, est forcément comprise entre 0 et $2l$, il en résulte que, s'il faut prendre $f(\zeta)\binom{ml}{ml+l}$, m étant un nombre entier quelconque, $F(-\zeta)$ peut appartenir soit à $F(-\zeta)\binom{ml}{ml+l}$ ou à $F(-\zeta)\binom{ml-l}{ml}$ ou encore à $F(-\zeta)\binom{ml-2l}{ml-l}$. Donc, chaque type de $f(\zeta)$ représenté par l'une des quatre formules (64), (65), (66) et (67) donnera trois combinaisons possibles pour la valeur de u.

Supposons, par exemple, que $x + kt$ et $kt - x$ soient tous deux

compris entre $4il$ et $4il + l$. Alors on aura

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned} u = {} & x\left(1 + \frac{p}{2E\sigma g}\,\omega^2 r\right) + r - r\cos\frac{\omega}{k}(kt - x) \\ & + 2r\,\frac{\sin\frac{2il\omega}{k}\cos\frac{\omega}{k}(kt - 2il - l)\sin\frac{\omega x}{k}}{\cos\frac{\omega l}{k}} \\ & - 2\,\frac{Q}{E\sigma}\,\frac{k}{\omega}\,\frac{\sin\frac{2il\omega}{k}\cos\frac{\omega}{k}(kt - 2il)\sin\frac{\omega x}{k}}{\cos\frac{\omega l}{k}} \\ & - \frac{p}{E\sigma g}\,k\omega r\,\frac{\sin\frac{2il\omega}{k}\sin\frac{\omega}{k}(kt - 2il)\sin\frac{\omega x}{k}}{\cos\frac{\omega l}{k}}. \end{aligned}\right.$$

Il est évident que, pour $x = 0$, la différence entre $x + kt$ et $kt - x$ étant nulle, cette formule est applicable à l'origine de la bielle, et, par conséquent, qu'en y faisant $x = 0$, on doit satisfaire à la condition (56); or c'est effectivement ce qui a lieu.

Supposons maintenant que x et t soient tels, que $x + kt$ étant compris entre $4il + 2l$ et $4il + 3l$, $kt - x$ le soit entre $4il$ et $4il + l$. On a alors

$$(70)\quad \left\{\begin{aligned} u = {} & x - (kt - 4il - l)\,\frac{p}{2E\sigma g}\,\omega^2 r + r \\ & - r\,\frac{\cos\frac{\omega}{k}(kt - 4il - 2l)\cos\frac{\omega}{k}(l - x) - \sin\frac{\omega}{k}(kt - l)\sin\frac{\omega x}{k}}{\cos\frac{\omega l}{k}} - r\cos\frac{\omega}{k}(kt - x) \\ & - \frac{Q}{E\sigma}\,\frac{k}{\omega} + \frac{Q}{E\sigma}\,\frac{k}{\omega}\,\frac{\cos\frac{\omega}{k}(kt - 4il - l)\cos\frac{\omega}{k}(l - x) - \sin\omega t\sin\frac{\omega x}{k}}{\cos\frac{\omega l}{k}} \\ & + \frac{p}{2E\sigma g}\,k\omega r\,\frac{\sin\frac{\omega}{k}(kt - 4il - l)\cos\frac{\omega}{k}(l - x) + \cos\omega t\sin\frac{\omega x}{k}}{\cos\frac{\omega l}{k}}. \end{aligned}\right.$$

Pour $x = l$, la différence entre $x + kt$ et $kt - x$ étant égale à $2l$, la formule ci-dessus est applicable à l'extrémité de la bielle. Par conséquent l'expression (70) doit satisfaire à la condition (57), et c'est ce qui a lieu en effet.

On déduira facilement, dans tous les cas, de la valeur de u, celle de la vitesse $\frac{du}{dt}$ et de l'allongement proportionnel $\frac{du}{dx} - 1$.

PROBLÈME III.

Voici encore un autre exemple important. Il s'agit d'une tige terminée par un piston soumis à l'action de la vapeur et douée d'un mouvement alternatif.

Prenons pour l'état initial

$$(71) \qquad [\varphi(x) = x \quad \text{et} \quad \psi(x) = 0],$$

état qui est compatible avec les conditions imposées aux extrémités.

L'origine de la tige est soumise à un mouvement alternatif que nous supposerons exprimé par la relation

$$(72) \qquad \xi_0(t) = r - r\cos\omega t.$$

L'autre extrémité est soumise à l'action de la vapeur. Cette force est périodique, c'est-à-dire qu'elle redevient la même quand l'angle de rotation ωt a augmenté de 2π, et, de plus, nous devons admettre qu'elle reprend la même valeur, mais avec un signe contraire, quand ωt augmente de π.

Quant à sa valeur absolue, elle dépend des circonstances absolues de la distribution, telles que l'avance à l'admission, la fin de l'admission, la détente, l'échappement et la compression, lesquelles peuvent varier de mille manières.

Dans tous les cas possibles, cette quantité est développable en série trigonométrique de sinus et de cosinus des multiples d'un même arc. Mais pour ne pas compliquer les calculs, nous allons choisir la forme suivante qui a l'avantage de représenter simplement et approximativement l'effet moyen de la vapeur, particulièrement dans les machines

locomotives. C'est

$$(73) \qquad Q = G \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Pour $t = 0$ et pour $\omega t = \frac{\pi}{2}$, on a

$$(74) \qquad Q = G \sin\frac{\pi}{4}.$$

car

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}.$$

Pour $\omega t = \frac{\pi}{4}$, on a

$$Q = G.$$

Jusqu'à $\omega t = \frac{\pi}{2}$, la vapeur serait dans la période d'admission, qui commencerait à proprement parler pour $\omega t = -\frac{\pi}{4}$, angle d'avance à l'admission.

L'intensité de la force ne serait pas absolument constante, puisqu'elle varierait entre les limites $G \sin\frac{\pi}{4}$ et G.

De $\omega t = \frac{\pi}{2}$ à $\omega t = \frac{3}{4}\pi$, la pression diminue progressivement jusqu'à zéro. Ce serait là le commencement tout à la fois de l'échappement sur la face considérée du piston et de la compression, ou plutôt de l'admission sur la face opposée.

De plus l'expression (73) reprend la même valeur toutes les fois que ωt augmente de 2π, et elle ne fait que changer de signe quand ωt augmente de π.

On pourrait donc écrire comme il suit la condition imposée à l'extrémité de la tige, en considérant la vapeur comme agissant directement sur cette extrémité,

$$(75) \qquad \frac{du}{dx} = 1 + \frac{G}{E\sigma}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Alors le problème se résoudrait d'une manière tout à fait analogue

au précédent, relatif à la bielle d'accouplement. Mais on peut aussi vouloir tenir compte de l'inertie du piston. Dans ce dernier cas, l'équation de condition relative à l'extrémité de la tige est, en appelant P le poids du piston,

$$\frac{P}{g}\frac{d^2u}{dt^2} = G\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) - E\sigma\left(\frac{du}{dx} - 1\right) \quad \text{pour} \quad x = l$$

ou

$$(76) \qquad \frac{P}{g}\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_{x=l} + E\sigma\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=l} = G\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + E\sigma.$$

Comme d'ailleurs on a toujours

$$u = f(x + kt) + F(x - kt),$$

les conditions relatives aux extrémités peuvent s'écrire de la manière suivante, en faisant $kt = \zeta$ et observant que

$$\frac{E\sigma g}{Pk^2} = \frac{p}{Pl},$$

p étant le poids même de la tige :

$$(77) \qquad f(\zeta) + F(-\zeta) = c - c\cos\frac{\omega\zeta}{k}$$

et

$$(78) \qquad \left\{\begin{aligned} & f''(l+\zeta) + \frac{p}{Pl}f'(l+\zeta) + F''(l-\zeta) + \frac{p}{Pl}F'(l-\zeta) \\ & \qquad = \frac{Gg}{Pk^2}\cos\left(\frac{\omega\zeta}{k} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{p}{Pl}. \end{aligned}\right.$$

On a, comme dans les autres questions, à cause de l'équation (71),

$$(79) \qquad \left[f(\zeta)\binom{0}{l} = F(\zeta)\binom{0}{l} = \frac{1}{2}\zeta\right].$$

La relation (78) fait connaître tout de suite $f(\zeta)\binom{l}{2l}$. En effet, cette

équation s'intègre et donne, en appelant C une constante,

$$(80)\quad \left\{\begin{aligned} & f'(l+\zeta)+\frac{p}{Pl}f(l+\zeta) \\ & = C+\frac{p}{Pl}\zeta+\frac{Gg}{Pk\omega}\sin\left(\frac{\omega\zeta}{k}-\frac{\pi}{4}\right)+F'(l-\zeta)+\frac{p}{Pl}F(l-\zeta). \end{aligned}\right.$$

$F(l-\zeta)$ et par suite $F'(l-\zeta)$ sont données par l'équation (79) pour toutes les valeurs de ζ comprises entre o et l, et, par conséquent, l'équation (80) fera connaître $f(l+\zeta)\binom{0}{l}$ ou $f(\zeta)\binom{l}{2l}$.

La constante C se détermine d'après la condition que pour $\zeta=0$ le premier membre donne la valeur, déjà connue par l'équation (79), de $f'(l)+\frac{p}{Pl}f(l)$, laquelle valeur est

$$(81)\qquad C=\frac{Gg}{Pk\omega}\sin\frac{\pi}{4}.$$

Mettant cette valeur pour C dans l'équation (80) et y remplaçant $F'(l-\zeta)$ par $\frac{1}{2}$ et $F(l-\zeta)$ par $\frac{1}{2}(l-\zeta)$, puis mettant ζ à la place de $l+\zeta$ ou $\zeta-l$ à celle de ζ, on a, pour l'équation (80),

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned} & f'(\zeta)\binom{l}{2l}+\frac{p}{Pl}f(\zeta)\binom{l}{2l} \\ & =\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{p}{Pl}\zeta+\frac{Gg}{Pk\omega}\sin\frac{\pi}{4}+\frac{Gg}{Pk\omega}\sin\left[\frac{\omega}{k}(\zeta-l)-\frac{\pi}{4}\right]. \end{aligned}\right.$$

Cette équation, qui est linéaire du premier ordre par rapport à $f(\zeta)\binom{l}{2l}$ est intégrable, et, en appelant C_1 une constante, on a

$$(83)\quad \left\{\begin{aligned} & f(\zeta)\binom{l}{2l} \\ & =e^{-\frac{p}{Pl}\zeta}\left(C_1+\int e^{\frac{p}{Pl}\zeta}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{p}{Pl}\zeta+\frac{Gg}{Pk\omega}\sin\frac{\pi}{4}+\frac{Gg}{Pk\omega}\sin\left[\frac{\omega}{k}(\zeta-l)-\frac{\pi}{4}\right]\right\}d\zeta\right), \end{aligned}\right.$$

e étant la base des logarithmes népériens.

Les intégrations indiquées s'effectuent sans difficulté. La constante C_1

se détermine d'après la condition que, pour $\zeta = l$, valeur de la variable qui sert de transition de la fonction $f(\zeta)\binom{0}{l}$ à la fonction $f(\zeta)\binom{l}{2l}$, ces deux fonctions aient la même valeur. Il est à remarquer d'ailleurs qu'à cause de la manière dont la première constante C a été déterminée, $f'(\zeta)\binom{0}{l}$ et $f'(\zeta)\binom{l}{2l}$ ont aussi, comme cela doit être, la même valeur pour $\zeta = l$.

On a ainsi, tous calculs faits,

$$(84)\quad \left\{\begin{aligned} f(\zeta)\binom{l}{2l} &= \frac{1}{2}\zeta + \frac{Ggl}{pk\omega}\sin\frac{\pi}{4} \\ &+ \frac{Gg}{Pk\omega}\,\frac{\frac{p}{Pl}\sin\left[\frac{\omega}{k}(\zeta - l) - \frac{\pi}{4}\right] - \frac{\omega}{k}\cos\left[\frac{\omega}{k}(\zeta - l) - \frac{\pi}{4}\right]}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}} \\ &+ \frac{G}{E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\,\frac{\frac{p}{Pl} - \frac{\omega}{k}}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}}\,e^{-\frac{p}{Pl}(\zeta - l)}. \end{aligned}\right.$$

Les expressions suivantes de $f(\zeta)$, savoir $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$, $f(\zeta)\binom{3l}{4l}$, $f(\zeta)\binom{4l}{5l}$, etc., s'obtiendront d'une manière analogue à ce qui a été fait précédemment.

Ainsi, remplaçant dans l'équation (78) ζ par $l + \zeta$ et intégrant une première fois, on a, C étant une constante,

$$f'(2l + \zeta) + \frac{p}{Pl}f(2l + \zeta)$$

$$= C + \frac{p}{Pl}(\zeta + l) + \frac{Gg}{Pk\omega}\sin\left[\frac{\omega}{k}(\zeta + l) - \frac{\pi}{4}\right] + F'(-\zeta) + \frac{p}{Pl}F(-\zeta).$$

Remplaçant $F(-\zeta)$ et $F'(-\zeta)$ par leurs valeurs tirées de l'équa-

tion (77), puis ζ par $\zeta - 2l$, on a

$$(85)\quad \left\{\begin{aligned} & f'(\zeta) + \frac{p}{Pl} f(\zeta) \\ & = C + \frac{p}{Pl}(\zeta - l) - \frac{\omega r}{k}\sin\frac{\omega}{k}(\zeta - 2l) + \frac{p}{Pl} r - \frac{p}{Pl} r\cos\frac{\omega}{k}(\zeta - 2l) \\ & \quad + \frac{Gg}{Pk\omega}\sin\left[\frac{\omega}{k}(\zeta - l) - \frac{\pi}{4}\right] + f'(\zeta - 2l) - \frac{p}{Pl} f(\zeta - 2l), \end{aligned}\right.$$

équation qui fait connaître $f(\zeta)$ quand on connaît $f(\zeta - 2l)$, c'est-à-dire cette fonction pour les valeurs de la variable inférieures de $2l$.

Il est facile de se rendre compte que la constante C a toujours la même valeur. En effet, supposons d'abord qu'il s'agisse de $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$. Pour $\zeta = 3l$, il faut que $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$ et $f'(\zeta)\binom{2l}{3l}$ aient respectivement les mêmes valeurs que $f(\zeta)\binom{3l}{4l}$ et que $f'(\zeta)\binom{3l}{4l}$. Donc le premier membre de l'équation (85) et, par suite, le second membre, doivent avoir, pour $\zeta = 3l$, la même valeur, soit qu'on s'occupe de $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$ ou de $f(\zeta)\binom{3l}{4l}$. Or, dans le premier cas, il faut prendre, pour $f(\zeta - 2l)$ et pour $f'(\zeta - 2l)$, la fonction $f(\zeta)\binom{0}{l}$ et $f'(\zeta)\binom{0}{l}$ où l'on remplacera ζ par $\zeta - 2l$. Dans le second cas, il faut prendre pour $f(\zeta - 2l)$ et $f'(\zeta - 2l)$, la fonction $f(\zeta)\binom{l}{2l}$ et $f'(\zeta)\binom{l}{2l}$ en y remplaçant ζ par $\zeta - 2l$. Or, remplacer dans ces dernières fonctions ζ par $\zeta - 2l$ et y faire ensuite $\zeta = 3l$, cela revient à y faire de suite $\zeta = l$. Or, pour $\zeta = l$, on a

$$f(\zeta)\binom{0}{l} = f(\zeta)\binom{l}{2l}$$

et

$$f'(\zeta)\binom{0}{l} = f'(\zeta)\binom{l}{2l}.$$

Comme d'ailleurs le second membre de l'équation (85) est le même

pour deux fonctions consécutives $f(\zeta)$, C a forcément la même valeur pour $f(\zeta)\binom{3l}{4l}$ que pour $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$. On démontrerait absolument de même qu'elle est la même pour $f(\zeta)\binom{4l}{5l}$ que pour $f(\zeta)\binom{3l}{4l}$; la même pour $f(\zeta)\binom{5l}{6l}$ que pour $f(\zeta)\binom{4l}{5l}$ et ainsi de suite indéfiniment. Donc C a la même valeur pour toutes les fonctions que pour $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$.

Occupons-nous donc d'avoir C pour $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$.

Et d'abord, pour appliquer la relation générale (85) à $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$, il faut remplacer dans le second membre $f(\zeta-2l)$ et $f'(\zeta-2l)$ par les expressions qu'on obtient en substituant $\zeta-2l$ à ζ dans $f(\zeta)\binom{0}{l}$ et $f'(\zeta)\binom{0}{l}$, ce qui donne

$$f'(\zeta)\binom{2l}{3l}+\frac{p}{Pl}f(\zeta)\binom{2l}{3l}=C+\frac{1}{2}+\frac{p}{2Pl}\zeta-\frac{\omega r}{k}\sin\frac{\omega}{k}(\zeta-2l)$$
$$+\frac{p}{Pl}r-\frac{p}{Pl}r\cos\frac{\omega}{k}(\zeta-2l)+\frac{Gg}{Pk\omega}\sin\left[\frac{\omega}{k}(\zeta-l)-\frac{\pi}{4}\right].$$

Déterminant la constante de telle manière que, pour $\zeta=2l$, le deuxième membre de la relation ci-dessus ait la même valeur que le second membre de l'équation (82), on a

$$C=\frac{Gg}{Pk\omega}\sin\frac{\pi}{4},$$

qui est, dès lors, la valeur commune de la constante C pour toutes les fonctions, et l'on a

$$(86)\qquad \left\{\begin{aligned} &f'(\zeta)\binom{2l}{3l}+\frac{p}{Pl}f(\zeta)\binom{2l}{3l}=\frac{1}{2}+\frac{p}{2Pl}\zeta\\ &-\frac{\omega r}{k}\sin\frac{\omega}{k}(\zeta-2l)+\frac{p}{Pl}r-\frac{p}{Pl}r\cos\frac{\omega}{k}(\zeta-2l)\\ &+\frac{Gg}{Pk\omega}\sin\frac{\pi}{4}+\frac{Gg}{Pk\omega}\sin\left[\frac{\omega}{k}(\zeta-l)-\frac{\pi}{4}\right].\end{aligned}\right.$$

Cette équation linéaire et de premier ordre par rapport à $f(\zeta)\binom{2l}{3l}$ s'intègre absolument comme l'équation (82).

Il en est de même de celles qui sont relatives aux fonctions suivantes, et de cette manière on déduira successivement

$$f(\zeta)\binom{2l}{3l} \quad \text{de} \quad f(\zeta)\binom{0}{l};$$

$$f(\zeta)\binom{3l}{4l} \quad \text{de} \quad f(\zeta)\binom{l}{2l},$$

$$f(\zeta)\binom{4l}{5l} \quad \text{de} \quad f(\zeta)\binom{2l}{3l},$$

et ainsi de suite.

La seconde constante introduite par l'intégration se détermine toujours d'après la condition que deux fonctions consécutives aient la même valeur pour la valeur de la variable qui leur est commune.

On obtient ainsi

$$(87)\quad \left\{\begin{aligned}
f(\zeta)\binom{2l}{3l} &= \frac{1}{2}\zeta - \frac{\omega r}{k}\frac{\frac{p}{Pl}\sin\frac{\omega}{k}(\zeta-2l) - \frac{\omega}{k}\cos\frac{\omega}{k}(\zeta-2l)}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2+\frac{\omega^2}{k^2}} + r \\
&- \frac{p}{Pl}r\frac{\frac{p}{Pl}\cos\frac{\omega}{k}(\zeta-2l) + \frac{\omega}{k}\sin\frac{\omega}{k}(\zeta-2l)}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2+\frac{\omega^2}{k^2}} + \frac{Ggl}{pk\omega}\sin\frac{\pi}{4} \\
&+ \frac{Gg}{Pk\omega}\frac{\frac{p}{Pl}\sin\left[\frac{\omega}{k}(\zeta-l)-\frac{\pi}{4}\right] - \frac{\omega}{k}\cos\left[\frac{\omega}{k}(\zeta-l)-\frac{\pi}{4}\right]}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2+\frac{\omega^2}{k^2}} \\
&+ \frac{G}{E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\frac{\frac{p}{Pl}-\frac{\omega}{k}}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2+\frac{\omega^2}{k^2}}e^{-\frac{p}{Pl}(\zeta-l)} - 2\frac{\omega^2 r}{k^2}\frac{1}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2+\frac{\omega^2}{k^2}}e^{-\frac{p}{Pl}(\zeta-2l)}.
\end{aligned}\right.$$

On aurait ensuite les valeurs de

$$f(\zeta)\binom{3l}{4l}, \qquad f(\zeta)\binom{4l}{5l}, \qquad f(\zeta)\binom{5l}{6l}\cdots$$

Ayant $f(\zeta)$, on en déduit $F(-\zeta)$ suivant la règle ordinaire, par l'équation (77).

Je vais donner deux exemples des valeurs de u fournies par ces fonctions.

Supposons d'abord que

$$x - kt < 0$$

et que

$$x + kt \quad \text{et} \quad kt - x$$

soient deux quantités comprises entre l et $2l$. C'est alors la formule (84) qui doit servir, et l'on trouve, après quelques réductions faciles,

$$(88)\quad \left\{\begin{aligned} & u = x + r - r\cos\frac{\omega}{k}(kt - x) \\ & + 2\frac{Gg}{Pk\omega}\frac{\frac{p}{Pl}\cos\frac{\omega}{k}(kt - l) + \frac{\omega}{k}\sin\frac{\omega}{k}(kt - l)}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}}\sin\frac{\omega x}{k} \\ & - \frac{G}{E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\frac{\frac{p}{Pl} - \frac{\omega}{k}}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}}e^{-\frac{p}{Pl}(kt - l)}\left(e^{\frac{p}{Pl}x} - e^{-\frac{p}{Pl}x}\right). \end{aligned}\right.$$

Cette formule doit convenir à l'origine de la tige, car, pour $x = 0$, la différence entre $x + kt$ et $kt - x$ est nulle, et, par conséquent, ces quantités peuvent être comprises toutes deux ensemble entre l et $2l$. Dès lors, l'équation (88) doit satisfaire à la condition relative à l'origine de la tige, et, en effet, si l'on y fait $x = 0$, on a

$$u = r - r\cos\omega t,$$

c'est-à-dire qu'on satisfait à l'équation (72).

Pour le second exemple, je suppose encore $x < kt$. Puis j'admets que $x + kt$ soit compris entre $2l$ et $3l$ et que $kt - x$ le soit entre 0 et l, ce qui est admissible puisque la différence entre $x + kt$ et $kt - x$ est $2x$ qui peut aller jusqu'à $2l$. Dans ce cas, il faut faire usage, pour $f(\zeta)$, de la formule (87), et quant à $F(x - kt)$ ou $F(-\zeta)$, sa valeur

très-simple se déduit de $f(\zeta)\left(\frac{0}{l}\right)$. On a alors

$$
(89)\quad \left\{
\begin{aligned}
& u = x + 2r - r\cos\frac{\omega}{k}(kt - x) \\
& + r\,\frac{\left[\frac{\omega^2}{k^2} - \left(\frac{p}{Pl}\right)^2\right]\cos\frac{\omega}{k}(x + kt - 2l) - 2\frac{\omega}{k}\frac{p}{Pl}\sin\frac{\omega}{k}(x + kt - 2l)}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}} \\
& + \frac{Ggl}{pk\omega}\sin\frac{\pi}{4} + \frac{Gg}{Pk\omega}\sin\frac{\pi}{4} \\
& \quad \times \frac{\left(\frac{p}{Pl} - \frac{\omega}{k}\right)\sin\frac{\omega}{k}(x + kt - l) - \left(\frac{p}{Pl} + \frac{\omega}{k}\right)\cos\frac{\omega}{k}(x + kt - l)}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}} \\
& + \frac{G}{E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\,\frac{\frac{p}{Pl} - \frac{\omega}{k}}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}}\,e^{-\frac{p}{Pl}(x + kt - l)} - 2\frac{\omega^2 r}{k^2} \\
& \quad \times \frac{1}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}}\,e^{-\frac{p}{Pl}(x + kt - 2l)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour $x = l$, la différence entre $x + kt$ et $kt - x$ est $2l$. Donc, la formule (89) doit satisfaire à la relation (76) relative à l'extrémité de la tige, et c'est en effet ce qui a lieu.

Il est intéressant de considérer le mouvement de l'extrémité de la tige au commencement du temps. Or, si kt est compris entre 0 et l, il arrive que, pour $x = l$, $x + kt$ est compris entre l et $2l$ et que $x - kt$ l'est entre 0 et l. D'après cela, on a alors

$$
(90)\quad \left\{
\begin{aligned}
& u = x + \frac{Ggl}{pk\omega}\sin\frac{\pi}{4} + \frac{Gg}{Pk\omega}\sin\frac{\pi}{4} \\
& \quad \times \frac{\left(\frac{p}{Pl} - \frac{\omega}{k}\right)\sin\frac{\omega}{k}(x + kt - l) - \left(\frac{p}{Pl} + \frac{\omega}{k}\right)\cos\frac{\omega}{k}(x + kt - l)}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}} \\
& + \frac{G}{E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\,\frac{\frac{p}{Pl} - \frac{\omega}{k}}{\left(\frac{p}{Pl}\right)^2 + \frac{\omega^2}{k^2}}\,e^{-\frac{p}{Pl}(x + kt - l)}.
\end{aligned}
\right.
$$

On vérifie aisément, à l'aide de cette formule, que, pour $x = l$ et $t = 0$, on a, ainsi que cela doit être,

$$u = l,$$
$$\frac{du}{dx} - 1 = 0,$$
$$\frac{du}{dt} = 0,$$

ce qui correspond à l'état initial donné. De plus, cette même formule (90) satisfait, même pour $t = 0$, à la condition (76), ce qui démontre, ainsi que je l'ai dit en commençant et comme du reste on pouvait le prévoir, que l'état initial choisi était compatible avec les conditions imposées aux extrémités.

PROBLÈME IV.

Il s'agit d'une manivelle. La question se pose de la manière suivante.

Une manivelle OM *tourne d'un mouvement uniforme autour de son origine* O, *qui est fixe. Une force, par exemple celle de la vapeur, agit sur son extrémité* M, *suivant une direction* MC, *parallèle à* AOB, *que je suppose constante. La loi de cette force est donnée et je la supposerai, pour fixer les idées, représentée, comme dans l'exemple précédent, par la formule*

$$(91) \qquad Q = G\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) = G\sin\frac{\pi}{4}(\cos\omega t + \sin\omega t).$$

En appelant Π la projection de cette force sur la direction OM, on a

$$\Pi = G\sin\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega t)\right].$$

Les conditions imposées aux extrémités de la tige sont donc : 1° pour $x = 0$,

$$(92) \qquad u = 0,$$

et 2° pour $x = l$,

$$(93) \quad \frac{du}{dx} = 1 - \frac{G}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4} - \frac{G}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\cos(2\omega t) - \frac{G}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\sin(2\omega t).$$

Si l'on veut tenir compte de la force centrifuge des diverses parties de la manivelle, l'équation aux différences partielles ne se présente pas tout à fait sous la forme ordinaire; mais il est facile de l'y ramener.

En effet, on a, dans ce cas,

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \omega^2 x + k^2 \frac{d^2 u}{dx^2}. \tag{94}$$

Appelons u_1 ce que serait u si toutes les parties de la manivelle étaient en équilibre sous l'action de la force centrifuge et de l'élasticité et qu'il n'y eût aucune force appliquée à l'extrémité de la manivelle.

On a alors

$$\omega^2 x + k^2 \frac{d^2 u_1}{dx^2} = 0, \tag{95}$$

et l'on trouve aisément

$$u_1 = \left(1 + \frac{\omega^2 l^2}{2k^2}\right) x - \frac{\omega^2 x^3}{6k^2}. \tag{96}$$

Posons maintenant

$$u = u_1 + \mathrm{U}, \tag{97}$$

et il reste à déterminer U.

On a d'abord

$$\frac{d^2 \mathrm{U}}{dt^2} = k^2 \frac{d^2 \mathrm{U}}{dx^2}. \tag{98}$$

Les conditions (92) et (93), relatives aux extrémités, deviennent pour U : 1° pour $x = 0$,

$$\mathrm{U} = 0, \tag{99}$$

et 2° pour $x = l$,

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx} = -\frac{\mathrm{G}}{2\mathrm{E}\sigma} \sin\frac{\pi}{4} - \frac{\mathrm{G}}{2\mathrm{E}\sigma} \sin\frac{\pi}{4} \cos(2\omega t) - \frac{\mathrm{G}}{2\mathrm{E}\sigma} \sin\frac{\pi}{4} \sin(2\omega t). \tag{100}$$

Il reste à fixer l'état initial. Or, j'admettrai que, à l'origine du temps,

la vitesse de tous les points de la manivelle soit nulle et que toutes ses parties soient en équilibre sous l'action des forces agissantes qui sont : d'une part, les forces centrifuges, et d'autre part, à l'extrémité de la tige, la force H qui a alors pour valeur $G \sin \frac{\pi}{4}$. Cet état est évidemment compatible avec les autres conditions données et l'on trouve facilement, pour $t = 0$,

$$u = \left(1 + \frac{\omega^2 l^2}{2k^2} - \frac{G}{E\sigma} \sin \frac{\pi}{4}\right) x - \frac{\omega^2 x^3}{6k^2} \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt} = 0.$$

Donc, comme $U = u - u_1$, si l'on appelle respectivement $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ les valeurs données de U et de $\frac{dU}{dt}$ pour $t = 0$, on a

$$\varphi(x) = -\left(\frac{G}{E\sigma} \sin \frac{\pi}{4}\right) x \tag{101}$$

et

$$\psi(x) = 0. \tag{102}$$

La méthode générale s'applique maintenant. Il est inutile de répéter tous les calculs. Voici les principaux résultats qu'on obtient successivement, en faisant, comme toujours, $kt = \zeta$:

$$f(\zeta)\binom{0}{l} = F(\zeta)\binom{0}{l} = -\left(\frac{G}{2E\sigma} \sin \frac{\pi}{4}\right)\zeta; \tag{103}$$

puis on a

$$\left\{\begin{aligned} f(\zeta)\binom{l}{3l} = &-\frac{Gl}{2E\sigma} \sin \frac{\pi}{4} - \frac{G}{4E\sigma} \frac{k}{\omega} \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{2\omega}{k}(\zeta - l) - \frac{G}{4E\sigma\omega} \frac{k}{\omega} \sin \frac{\pi}{4} \\ &+ \frac{G}{4E\sigma} \frac{k}{\omega} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{2\omega}{k}(\zeta - l), \end{aligned}\right. \tag{104}$$

$$\left\{\begin{aligned} f(\zeta)\binom{3l}{5l} = &\frac{2Gl}{2E\sigma} \sin \frac{\pi}{4} - \left(\frac{G}{2E\sigma} \sin \frac{\pi}{4}\right)\zeta - \frac{G}{4E\sigma} \frac{k}{\omega} \sin \frac{2\omega}{k}(\zeta - l) \\ &+ \frac{G}{4E\sigma} \frac{k}{\omega} \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{2\omega}{k}(\zeta - 3l) - \frac{G}{4E\sigma\omega} \frac{k}{\omega} \sin \frac{\pi}{4} \\ &+ \frac{G}{4E\sigma} \frac{k}{\omega} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{2\omega}{k}(\zeta - l) + \frac{G}{4E\sigma} \frac{k}{\omega} \sin \frac{\pi}{4} \\ &- \frac{G}{4E\sigma} \frac{k}{\omega} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{2\omega}{k}(\zeta - 3l), \end{aligned}\right. \tag{105}$$

. . . . . .

ou, d'une manière générale et en réduisant, on a, pour tout nombre entier i supérieur ou égal à o,

$$(106)\quad \left\{\begin{aligned} f(\zeta)\begin{pmatrix}4il+l\\4il+3l\end{pmatrix} = &-\frac{(2i+1)}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}-\frac{G}{4E\sigma\omega}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\frac{\cos\frac{(2i+1)2\omega l}{k}\sin\frac{2\omega}{k}(\zeta-2il-l)}{\cos\frac{2\omega l}{k}}\\ &-\frac{G}{4E\sigma\omega}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}+\frac{G}{4E\sigma\omega}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\frac{\cos\frac{(2i+1)2\omega l}{k}\cos\frac{2\omega}{k}(\zeta-2il-l)}{\cos\frac{2\omega l}{k}},\end{aligned}\right.$$

et, pour tout entier i supérieur à o,

$$(107)\quad \left\{\begin{aligned} f(\zeta)\begin{pmatrix}4il-l\\4il+l\end{pmatrix} = &\frac{2iGl}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}-\left(\frac{G}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\right)\zeta\\ &-\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\frac{\sin\frac{4il\omega}{k}\cos\frac{2\omega}{k}(\zeta-2il)}{\cos\frac{2\omega l}{k}}\\ &-\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\frac{\sin\frac{4il\omega}{k}\sin\frac{2\omega}{k}(\zeta-2il)}{\cos\frac{2\omega l}{k}}.\end{aligned}\right.$$

On aura ensuite, pour tout entier i supérieur ou égal à o,

$$(108)\quad \left\{\begin{aligned} F(-\zeta)\begin{pmatrix}4il+l\\4il+3l\end{pmatrix} = &\frac{(2i+1)Gl}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\\ &+\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\frac{\cos\frac{(2i+1)2\omega l}{k}\sin\frac{2\omega}{k}(\zeta-2il-l)}{\cos\frac{2\omega l}{k}}\\ &+\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\\ &-\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\frac{\cos\frac{(2i+1)2\omega l}{k}\cos\frac{2\omega}{k}(\zeta-2il-l)}{\cos\frac{2\omega l}{k}},\end{aligned}\right.$$

et, pour tout entier i, supérieur à 0,

$$(109)\quad \left\{\begin{aligned} F(-\zeta)\begin{pmatrix}4il-l\\4il+l\end{pmatrix} &= -\frac{2iGl}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}+\left(\frac{G}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\right)\zeta \\ &\quad+\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\frac{\sin\frac{4il\omega}{k}\cos\frac{2\omega}{k}(\zeta-2il)}{\cos\frac{2\omega l}{k}} \\ &\quad+\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\frac{\sin\frac{4il\omega}{k}\sin\frac{2\omega}{k}(\zeta-2il)}{\cos\frac{2\omega l}{k}}. \end{aligned}\right.$$

A l'aide de ces formules et de la relation (97), on formera maintenant sans difficulté la valeur de u, pour toutes les valeurs possibles de x et de t. Il peut se présenter quatre cas généraux :

1° Si

$$4il+l<x+kt<4il+3l$$

et

$$4il+l<kt-x<4il+3l,$$

on aura

$$(110)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \left(1+\frac{\omega^2l^2}{2k^2}\right)x-\frac{\omega^2x^3}{6k^2} \\ &\quad-\frac{G}{2E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\frac{\cos\frac{(2i+1)2\omega l}{k}\left[\cos\frac{2\omega}{k}(k-2il-l)+\sin\frac{2\omega}{k}(kt-2il-l)\right]\sin\frac{2\omega x}{k}}{\cos\frac{2\omega l}{k}}. \end{aligned}\right.$$

2° Si

$$4il+l<x+kt<4il+3l \quad \text{et que} \quad 4il-l<kt-x<4il+l,$$

on aura

$$(111)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \left(1+\frac{\omega^2l^2}{2k^2}\right)x-\frac{\omega^2x^3}{6k^2}-\frac{(4i+1)Gl}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4} \\ &\quad+\left(\frac{G}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\right)(kt-x)-\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}-\frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4} \\ &\quad\times\frac{[\cos(2\omega t)+\sin(2\omega t)]\sin\frac{2\omega x}{k}+\left[\sin\frac{2\omega}{k}(kt-4il-l)-\cos\frac{2\omega}{k}(kt-4il-l)\right]\cos\frac{2\omega}{k}(l-x)}{\cos\frac{2\omega l}{k}}. \end{aligned}\right.$$

3° Si

$$4il - l < x + kt < 4il + l$$

et

$$4il - l < kt - x < 4il + l,$$

on aura

$$(112)\quad \left\{\begin{aligned} u = {} & \left(1 + \frac{\omega^2 l^2}{2k^2}\right) x - \frac{\omega^2 x^3}{6k^2} - \left(\frac{G}{E\sigma} \sin\frac{\pi}{4}\right) x \\ & + \frac{G}{2E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4}\,\frac{\sin\frac{4il\omega}{k}\left[\sin\frac{2\omega}{k}(kt - 2il) - \cos\frac{2\omega}{k}(kt - 2il)\right]\sin\frac{2\omega x}{k}}{\cos\frac{2\omega l}{k}}. \end{aligned}\right.$$

Et 4° enfin, si

$$4il - l < x + kt < 4il + l \quad \text{et que} \quad 4il - 3l < kt - x < 4il - l,$$

on aura

$$(113)\quad \left\{\begin{aligned} & u = \left(1 + \frac{\omega^2 l^2}{2k^2}\right) x - \frac{\omega^2 x^3}{6k^2} + \frac{(4i-1)Gl}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4} \\ & - \left(\frac{G}{2E\sigma}\sin\frac{\pi}{4}\right)(x + kt) + \frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4} - \frac{G}{4E\sigma}\frac{k}{\omega}\sin\frac{\pi}{4} \\ & \times \frac{[\cos(2\omega t) + \sin(2\omega t)]\sin\frac{2\omega x}{k} + \left[\cos\frac{2\omega}{k}(kt - 4il + l) - \sin\frac{2\omega}{k}(kt - 4il + l)\right]\cos\frac{2\omega}{k}(l - x)}{\cos\frac{2\omega l}{k}}. \end{aligned}\right.$$

Les formules (110) et (112) conviennent évidemment à l'origine de la tige, puisque, pour $x = 0$, la différence entre $x + kt$ et $kt - x$ est nulle. Et, en effet, elles donnent toutes deux $u = 0$ pour $x = 0$. Pour une raison semblable, les formules (111) et (113) conviennent à l'extrémité de la tige et il est facile de s'assurer qu'elles satisfont toutes deux à la condition (93) imposée pour cette extrémité.

On formerait de même très-facilement, à l'aide des formules qui précèdent, les valeurs de u pour les premiers instants du phénomène, alors que $x + kt$ et $kt - x$ ne sont pas deux quantités chacune supérieure à l.

Au moyen des valeurs de u, on obtient ensuite immédiatement celles

de $\frac{du}{dt}$ et de $\frac{du}{dx} - 1$, c'est-à-dire les vitesses et les allongements proportionnels.

PROBLÈME V.

Il s'agit des vibrations transversales d'une corde tendue. Celle-ci étant en repos et son origine maintenue fixe, on soumet son extrémité à un mouvement alternatif et l'on demande le mouvement vibratoire qui en résultera pour la corde.

On sait que l'équation aux différences partielles est

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2y}{dx^2} \tag{114}$$

ou

$$a^2 = \frac{glT}{p},$$

en appelant p le poids et l la longueur de la corde. De plus, T est sa tension. En désignant par α l'allongement proportionnel correspondant à cette tension, on a, en conservant les notations antérieures,

$$T = E\sigma\alpha$$

et

$$a^2 = \frac{Eg\alpha}{\varpi}. \tag{115}$$

On a ici, pour l'état initial,

$$[\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0], \tag{116}$$

et pour les extrémités, quel que soit t,

$$(y)_{x=0} = 0 \tag{117}$$

et

$$(y)_{x=l} = r - r\cos\omega t. \tag{118}$$

Les calculs se faisant toujours de la même manière, je me borne à mentionner les résultats.

En faisant $at = \zeta$, on a

$$f(\zeta)\begin{pmatrix}0\\l\end{pmatrix} = F(\zeta)\begin{pmatrix}0\\l\end{pmatrix} = 0,$$

$$f(\zeta)\begin{pmatrix}l\\3l\end{pmatrix} = r - r\cos\frac{\omega}{a}(\zeta - l),$$

$$f(\zeta)\begin{pmatrix}3l\\5l\end{pmatrix} = r - r\cos\frac{\omega}{a}(\zeta - l) + r - r\cos\frac{\omega}{a}(\zeta - 3l),$$

$$f(\zeta)\begin{pmatrix}5l\\7l\end{pmatrix} = r - r\cos\frac{\omega}{a}(\zeta - l) + r - r\cos\frac{\omega}{a}(\zeta - 3l) + r - r\cos\frac{\omega}{a}(\zeta - 5l),$$

et ainsi de suite; ou, d'une manière générale, pour tout entier $i > 0$,

$$(119)\qquad f(\zeta)\begin{pmatrix}2il - l\\2il + l\end{pmatrix} = ir - r\frac{\sin\frac{il\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}(\zeta - il)}{\sin\frac{\omega l}{a}}$$

et

$$(120)\qquad F(-\zeta)\begin{pmatrix}2il - l\\2il + l\end{pmatrix} = -ir + r\frac{\sin\frac{il\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}(\zeta - il)}{\sin\frac{\omega l}{a}}.$$

A l'aide de ces formules, on obtient immédiatement y.

Il peut se présenter deux cas.

Premier cas :

$$2il - l < x + at < 2il + l$$

et

$$2il - l < at - x < 2il + l.$$

On a alors

$$(121)\qquad y = r\frac{\sin\frac{2i\omega l}{a}\sin\omega t - \left(1 - \cos\frac{2i\omega l}{a}\right)\cos\omega t}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega x}{a}.$$

Pour $x = 0$, la différence entre $x + at$ et $at - x$ étant nulle, la formule (121) doit toujours convenir à l'origine de la corde et, en effet, elle donne bien, pour $x = 0$,

$$y = 0, \quad \text{quel que soit } t.$$

Deuxième cas :

$$2il - l < x + at < 2il + l$$

et

$$2il - 3l < at - x < 2il - l.$$

On a alors

$$(122) \qquad y = r - r\frac{\cos\omega t \sin\frac{\omega x}{a} + \cos\frac{\omega}{a}(at - 2il + l)\sin\frac{\omega}{a}(l - x)}{\sin\frac{\omega l}{a}}.$$

Cette formule doit toujours convenir à l'extrémité de la corde, puisque, pour $x = l$, la différence entre $x + at$ et $at - x$ est $2l$. Et en effet, pour $x = l$, elle donne $y = r - r\cos\omega t$.

Dans certaines conditions intéressantes à examiner, le mouvement vibratoire de la corde devient isochrone.

Supposons d'abord

$$(123) \qquad \sin\frac{\omega l}{a} = +1$$

et

$$(124) \qquad \frac{\omega l}{a} = \frac{\pi}{2}.$$

Dans ce cas la formule (121) devient, pour i pair,

$$(125) \qquad y = 0,$$

et pour i impair

$$(126) \qquad y = -2r\cos\omega t \sin\frac{\omega x}{a}.$$

En même temps la formule (122) donne, pour i pair,

$$(127) \qquad y = r + r\sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{a}\right),$$

et pour i impair,

$$(128) \qquad y = r - r\sin\left(\omega t + \frac{\omega x}{a}\right).$$

Les quatre formules (125), (126), (127), (128) ne contiennent plus i. Mais pour un même point x, la même formule revient chaque fois que at a augmenté de $4l$, car alors le nombre i a augmenté de deux unités et redevient pair s'il était pair, ou impair s'il était impair, et les quantités $x + at$ et $at - x$ sont de nouveau comprises chacune entre des limites de même forme qu'auparavant. Or, si at augmente de $4l$, ωt augmente de $\frac{4\omega l}{a}$, ou de 2π à cause de la formule (124). Mais en même temps on voit que les quatre formules (125), (126), (127), (128) ne changent pas quand ωt s'accroît de 2π. Ainsi donc chaque point de la corde exécute des vibrations isochrones dont la durée est

$$\theta = \frac{2\pi}{\omega} \tag{129}$$

ou

$$\theta = \frac{4l}{a}, \tag{130}$$

soit un temps double des vibrations isochrones que ferait la corde supposée fixe à ses deux extrémités.

Mais il faut pour cela que la vitesse angulaire ω soit celle qui résulte de (124). Si l'on appelle N le nombre de vibrations par seconde, lequel sera celui imprimé à l'extrémité de la corde, on devra avoir

$$N = \frac{a}{4l}. \tag{131}$$

Par exemple, s'il s'agissait d'un fil de fer ou d'acier tendu par une force correspondant à un allongement proportionnel de 0,0016, on aurait

$$N = \frac{200}{4l},$$

et si on avait $l = 0^{m},50$, on aurait $N = 100$, ce qui indiquerait la hauteur du son correspondant.

Ce problème présente d'autres particularités intéressantes. Par exemple, si

$$\sin\frac{\omega l}{a} = +1,$$

mais que $\frac{\omega l}{a}$ soit supérieur à $\frac{\pi}{2}$, on aura toujours les mêmes formules (125), (126), (127) et (128), c'est-à-dire que y sera toujours périodique, mais à des intervalles ne correspondant plus à $\theta = \frac{2\pi}{\omega}$.

La même chose aura lieu, si

$$\sin \frac{\omega l}{a} = -1.$$

Dans ce cas, les formules, très-faciles à obtenir, sont tout à fait analogues à (125), (126), (127) et (128).

Enfin, on peut considérer le cas où

$$\sin \frac{\omega l}{a} = 0,$$

c'est-à-dire où $\frac{\omega l}{a}$ est un multiple de π. Dans ce cas, les deux formules générales (121) et (122) se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. Mais il est facile d'obtenir leur vraie valeur qui est, pour l'équation (121),

$$(132) \qquad y = 2ir \frac{\sin \omega t \sin \frac{\omega x}{a}}{\cos \frac{\omega l}{a}},$$

et pour la formule (122),

$$(133) \qquad y = r - r \frac{\cos \omega t \cos \frac{\omega x}{a} - (2i - 1) \sin \omega t \sin \frac{\omega x}{a}}{\cos \frac{\omega l}{a}}.$$

On voit qu'alors les valeurs de y ne sont plus soumises à la périodicité et qu'elles tendraient à croître indéfiniment avec i.

PROBLÈME VI.

On peut encore traiter le problème précédent avec des données différentes.

Ainsi, par exemple, au lieu que l'origine de la corde soit fixe, on

peut la soumettre au même mouvement que l'extrémité, de sorte que, pour $x=0$ comme pour $x=l$, on ait

$$y = r - r\cos\omega t.$$

On obtient alors les quatre formules types suivantes, pour tout entier i :

$$(134)\qquad f(\zeta)\binom{2il-l}{2il} = r - r\frac{\cos\frac{(2i-1)\omega l}{2a}\cos\frac{\omega}{a}(\zeta - il)}{\cos\frac{\omega l}{2a}},$$

$$(135)\qquad f(\zeta)\binom{2il}{2il+l} = r\frac{\sin\frac{i\omega l}{a}\sin\frac{\omega}{a}\left(\zeta - il - \frac{l}{2}\right)}{\cos\frac{\omega l}{2a}},$$

$$(136)\qquad F(-\zeta)\binom{2il-l}{2il} = r\frac{\sin\frac{i\omega l}{a}\sin\frac{\omega}{a}\left(\zeta - il + \frac{l}{2}\right)}{\cos\frac{\omega l}{2a}},$$

$$(137)\qquad F(-\zeta)\binom{2il}{2il+l} = r - r\frac{\cos\frac{(2i+1)\omega l}{2a}\cos\frac{\omega}{a}(\zeta - il)}{\cos\frac{\omega l}{2a}}.$$

A l'aide de ces quatre types, on forme la valeur de y pour toutes celles de x et de t. On se rend compte aisément qu'il peut y avoir six combinaisons de ces formules.

On reconnaît aussi que, quand $\cos\frac{\omega l}{2a} = \pm 1$, c'est-à-dire quand $\frac{\omega l}{a}$ est un multiple de 2π, la valeur de y est périodique, et que, quand $\cos\frac{\omega l}{2a} = 0$ ou que, quand $\frac{\omega l}{a}$ est un multiple impair de π, la valeur de y tend à croître indéfiniment.

PROBLÈME VII.

On peut encore changer les données du problème précédent de la manière suivante :

On suppose que, pour $x = 0$, on ait

$$y = -r + r\cos\omega t,$$

et que, pour $x = l$, on ait

$$y = r - r\cos\omega t.$$

Alors les deux extrémités du fil ont à chaque instant un mouvement inverse.

Voici quels sont les résultats auxquels on parvient. Il y a trois cas.

Premier cas :

$$il < x + at < il + l$$

et

$$il < at - x < il + l.$$

On a alors

$$(138)\qquad y = -r + r\frac{\cos\frac{\omega}{2a}(2at - 2il - l)\sin\frac{\omega x}{a} - \cos\omega t\sin\frac{\omega}{2a}(2x - l)}{\sin\frac{\omega l}{2a}}.$$

Deuxième cas :

$$il < x + at < il + l,$$

$$il - l < at - x < il.$$

On a

$$(139)\qquad y = 2r\frac{\sin\frac{i\omega l}{2a}\sin\frac{\omega}{2a}(2at - il)\sin\frac{\omega}{2a}(2x - l)}{\sin\frac{\omega l}{2a}}.$$

Troisième cas :

$$il < x + at < il + l,$$

$$il - 2l < at - x < il - l.$$

On a

$$(140)\qquad y = r - r\frac{\cos\frac{\omega}{2a}(2at - 2il + l)\sin\frac{\omega}{a}(l - x) + \cos\omega t\sin\frac{\omega}{2a}(2x - l)}{\sin\frac{\omega l}{2a}}.$$

L'origine de la corde qui répond à $x = 0$ correspond toujours à l'équation (138). Et en effet, si l'on fait, dans cette dernière for-

mule, $x = 0$, on a

$$y = -r + r\cos\omega t.$$

De même, l'extrémité de la corde répond toujours à l'équation (140). Or, si l'on y fait $x = l$, on a, comme comme cela devait être,

$$y = r - r\cos\omega t.$$

Par une raison semblable, le milieu du fil répond toujours à l'équation (139). Or, si l'on fait $x = \frac{l}{2}$ dans cette formule, on a $y = 0$, quel que soit t, ce qui montre que, dans ces circonstances, le milieu de la corde reste en repos pendant tout le mouvement.

CHAPITRE II.

Le principe du deuxième procédé que j'ai appliqué est de ramener la question au cas où les conditions imposées aux extrémités des corps sont invariables, au lieu d'être des fonctions du temps, problème que l'on résout ensuite par les méthodes ordinaires. Il suppose seulement que les fonctions dont il s'agit sont d'une certaine forme, mais qui se trouve être précisément celle que l'on rencontre le plus ordinairement dans les applications.

Soit d'abord l'équation déja examinée dans le premier chapitre, et qui est le type de l'équation des cordes vibrantes ou des mouvements longitudinaux des tiges,

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = k^2\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Je fais

$$(2) \qquad u = u_1 + U,$$

et je me propose de déterminer u_1 de telle manière que, dans les équations de condition relatives aux extrémités, cette fonction u_1 fasse disparaître les fonctions du temps dont il s'agit. Alors la recherche de U sera ramenée au problème ordinaire, c'est-à-dire que pour U les con-

ditions relatives aux extrémités seront invariables, et U devra en outre satisfaire à l'état initial modifié par u_1.

Supposons que les fonctions arbitraires du temps dont il s'agit ne contiennent que des termes périodiques. C'est bien, en effet, ce qui arrive presque toujours dans les applications, particulièrement dans les machines. Soit, par exemple,

$$\mathrm{I} \sin \omega t$$

l'un de ces termes, entrant dans l'une quelconque des équations de condition, I et ω étant deux constantes.

J'introduirai, en conséquence, dans la valeur de u_1, une expression correspondante telle que

$$\left(\mathrm{A}_1 \sin \frac{\omega x}{k} + \mathrm{B}_1 \cos \frac{\omega x}{k}\right) \sin \omega t,$$

qui satisfait d'elle-même à l'équation (1) et qui contient deux constantes indéterminées A_1 et B_1. J'en fais autant pour chaque terme périodique entrant dans l'une ou l'autre des équations relatives aux extrémités, de sorte que u_1 contiendra deux fois autant de constantes indéterminées qu'il y a de ces termes dans l'une ou l'autre des équations de condition, et, comme ces dernières, d'après la nature de l'équation (1), sont elles-mêmes au nombre de deux, on aura précisément le nombre d'équations nécessaire pour déterminer toutes les constantes A_1, B_1, etc., en égalant séparément à zéro tous les facteurs des termes périodiques qui se trouveront dans les équations de condition, lorsqu'on y aura substitué u_1 pour u.

S'il se trouvait dans les équations de condition des termes constants ou proportionnels à la première ou à la deuxième puissance de t, on les fera disparaître par une simple adjonction à u_1, comme on le verra dans les exemples qui suivent.

S'il entrait dans l'expression des fonctions du temps données des termes en exponentielles, on les ferait disparaître de même.

Soit maintenant l'équation aux différences partielles qui régit les vibrations transversales des verges, et qui est

$$(3) \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = -k^2 \frac{d^4 y}{dx^4},$$

où k^2 est un nombre généralement très-grand dont la valeur est

$$k^2 = \frac{Mg}{\varpi},$$

M étant le moment d'élasticité, ϖ le poids de l'unité de volume de la verge et g la gravité.

On fera encore

$$y = y_1 + Y, \tag{4}$$

et il faudra que y_1 soit déterminé de manière à faire disparaître les fonctions du temps des équations de condition qui, dans ce genre de question, sont toujours au nombre de quatre.

Ici, il faut que, à part les termes constants et proportionnels à la première ou à la deuxième puissance de t, les équations de condition ne renferment que des termes périodiques, et c'est bien ainsi, en effet, que cela se présente dans les applications.

Soit donc, par exemple,

$$I \cos \omega t$$

l'un de ces termes; on introduira, dans la valeur de y, une expression correspondante

$$\left[A_1 \sin \sqrt{\frac{\omega}{k}}.x + B_1 \cos \sqrt{\frac{\omega}{k}}.x + C_1 \frac{e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}}x} - e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}}x}}{2} + D_1 \frac{e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}}x} + e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}}x}}{2} \right] \cos \omega t,$$

laquelle satisfait à l'équation (3) et qui renferme quatre coefficients indéterminés

$$A_1,\ B_1,\ C_1 \text{ et } D_1.$$

On en fera autant pour tout terme périodique introduit dans l'une ou l'autre des quatre équations de condition par les fonctions arbitraires, et l'on voit qu'on pourra déterminer par de simples équations du premier degré tous ces coefficients A_1, B_1, C_1, D_1, etc., de manière à faire disparaître des équations relatives aux extrémités tout ce qui dépend du temps.

PROBLÈME I.

Déterminer le mouvement d'une tige douée d'un mouvement dans le sens de sa longueur.

L'origine a un mouvement alternatif donné et l'extrémité est libre. On a, en conservant les notations du premier chapitre,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = k^2 \frac{d^2u}{dx^2}, \tag{1}$$

$$(u)_{x=0} = r - r\cos\omega t, \tag{2}$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=l} = 1. \tag{3}$$

Puis l'état initial donné est

$$(u)_{t=0} = x, \tag{4}$$

et

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0} = 0. \tag{5}$$

On se rappelle que ce problème a été traité différemment dans le premier chapitre.

Posons

$$u = u_1 + \mathrm{U}, \tag{6}$$

et soit

$$u_1 = \mathrm{M} + \mathrm{N}x + \left(\mathrm{A}_1 \sin\frac{\omega x}{k} + \mathrm{B}_1 \cos\frac{\omega x}{k}\right)\cos\omega t, \tag{7}$$

M, N, A_1 et B_1 étant des coefficients à déterminer.

Je substitue cette valeur de u_1 à la place de u dans l'équation (2) et dans l'équation (3), et j'ai

$$\mathrm{M} + \mathrm{B}_1 \cos\omega t = r - r\cos\omega t,$$

$$\mathrm{N} + \frac{\omega}{k}\left(\mathrm{A}_1 \cos\frac{\omega l}{k} - \mathrm{B}_1 \sin\frac{\omega l}{k}\right)\cos\omega t = 1,$$

relations auxquelles on satisfait identiquement en faisant

$$M = r, \quad N = 1,$$

$$A_1 = -r\frac{\sin\frac{\omega l}{k}}{\cos\frac{\omega l}{k}} \quad \text{et} \quad B_1 = -r.$$

La valeur de u_1 est donc

$$(8) \qquad u_1 = x + r - r\frac{\cos\frac{\omega}{k}(l-x)\cos\omega t}{\cos\frac{\omega l}{k}}.$$

On aura maintenant, pour déterminer U, les équations suivantes

$$(9) \qquad \frac{d^2U}{dt^2} = k^2\frac{d^2U}{dx^2},$$

$$(10) \qquad (U)_{x=0} = 0,$$

$$(11) \qquad \left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=l} = 0,$$

et pour l'état initial,

$$(12) \qquad (U)_{t=0} = \varphi(x)$$

et

$$(13) \qquad \left(\frac{dU}{dt}\right)_{t=0} = \psi(x),$$

où

$$\varphi(x) = x - (u_1)_{t=0} \quad \text{et} \quad \psi(x) = -\left(\frac{du_1}{dt}\right)_{t=0},$$

soit

$$(14) \qquad \varphi(x) = -r + r\frac{\cos\frac{\omega}{k}(l-x)}{\cos\frac{\omega l}{k}}$$

et

$$(15) \qquad \psi(x) = 0.$$

Or, U s'obtient par les méthodes connues. Posons

$$(16)\qquad U = \sum (A_m \sin mx \sin kmt + B_m \sin mx \cos kmt).$$

Je ne mets pas de termes multipliés par $\cos mx$, puisque, pour $x = 0$, on doit avoir $U = 0$, de sorte que la condition (10) est déjà satisfaite. On satisfait aussi à la condition (11) en déterminant m d'après l'équation

$$\cos ml = 0$$

ou

$$(17)\qquad m = \frac{(2i+1)\pi}{2l},$$

où i est un nombre entier quelconque, que l'on peut supposer positif.

Les coefficients A_m et B_m se déterminent par les procédés d'élimination connus, et en appelant A_i et B_i ce que sont ces coefficients pour chaque valeur de i, on trouve très-facilement

$$A_i = 0,$$

$$B_i = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\frac{(2i+1)\pi x}{2l}\,dx.$$

On a donc, en résumé,

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} u = x + r - r\,\frac{\cos\frac{\omega}{k}(l-x)\cos\omega t}{\cos\frac{\omega l}{k}} \\ + \frac{2}{l}\sum\left(\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{(2i+1)\pi x}{2l}\,dx\right)\sin\frac{(2i+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2i+1)\pi k t}{2l}, \end{aligned}\right.$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs i depuis 0 jusqu'à l'infini.

Même exemple que le précédent, sauf que l'origine de la tige, au lieu de recevoir un mouvement alternatif, a un mouvement uniformément varié.

Les calculs étant très-simples, je me borne à énoncer les résultats, qui sont

$$(19)\qquad u_1 = \frac{1}{2}\gamma t^2 + \left(1 + \frac{\gamma l}{k^2}\right)x + \frac{\gamma x^2}{2k^2}$$

et

$$(20)\qquad U=\frac{2}{l}\sum\left(\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{(2i+1)\pi x}{2l}\,dx\right)\sin\frac{(2i+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2i+1)\pi kt}{2l}.$$

avec

$$\varphi(x)=\frac{\gamma l}{k^2}x-\frac{\gamma x^2}{2k^2}.$$

γ est l'accélération du mouvement de l'origine de la tige, de sorte que, pour $x=0$, on a, quel que soit t,

$$u=\frac{1}{2}\gamma t^2.$$

On a, d'ailleurs, pour toutes les valeurs de x et de t,

$$u=u_1+U.$$

PROBLÈME II.

Déterminer le mouvement d'une tige de piston dont l'origine a un mouvement alternatif et dont l'extrémité reçoit par l'intermédiaire d'un piston l'action de la vapeur.

Je conserve les mêmes notations que dans le chapitre Ier.

Les équations du problème sont

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dt^2}=k^2\frac{d^2u}{dx^2},\\ &(u)_{t=0}=x,\quad \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0}=0,\\ &(u)_{x=0}=r-r\cos\omega t,\\ &\frac{P}{g}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x=l}+E\sigma\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=l}=G\sin\frac{\pi}{4}(\cos\omega t+\sin\omega t)+E\sigma.\end{aligned}\right.$$

Soit

$$(22)\qquad u=u_1+U.$$

Faisons ici

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 = M + Nx &+ \left(A_1 \sin\frac{\omega x}{k} + B_1 \cos\frac{\omega x}{k}\right)\sin\omega t \\ &+ \left(C_1 \sin\frac{\omega x}{k} + D_1 \cos\frac{\omega x}{k}\right)\cos\omega t. \end{aligned}\right.$$

En substituant cette valeur de u_1 pour u dans les deux équations de condition relatives aux extrémités, nous avons :

$$(24)\quad M + B_1 \sin\omega t + D_1 \cos\omega t = r - r\cos\omega t,$$

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &-\frac{P\omega^2}{g}\left(A_1 \sin\frac{\omega l}{k} + B_1 \cos\frac{\omega l}{k}\right)\sin\omega t \\ &-\frac{P\omega^2}{g}\left(C_1 \sin\frac{\omega l}{k} + D_1 \cos\frac{\omega l}{k}\right)\cos\omega t \\ &+ E\sigma N + E\sigma\frac{\omega}{k}\left(A_1 \cos\frac{\omega l}{k} - B_1 \sin\frac{\omega l}{k}\right)\sin\omega t \\ &+ E\sigma\frac{\omega}{k}\left(C_1 \cos\frac{\omega l}{k} - D_1 \sin\frac{\omega l}{k}\right)\cos\omega t \end{aligned}\right.$$

$$= E\sigma + G\sin\frac{\pi}{4}(\cos\omega t + \sin\omega t).$$

Or, on satisfait identiquement aux équations (24) et (25) par les valeurs suivantes des constantes

$$M = r, \quad N = 1,$$

$$A_1 = \frac{G\sin\frac{\pi}{4}}{E\sigma\frac{\omega}{k}\cos\frac{\omega l}{k} - \frac{P\omega^2}{g}\sin\frac{\omega l}{k}},$$

$$B_1 = 0,$$

$$C_1 = \frac{G\sin\frac{\pi}{4} - r\left(E\sigma\frac{\omega}{k}\sin\frac{\omega l}{k} + \frac{P\omega^2}{g}\cos\frac{\omega l}{k}\right)}{E\sigma\frac{\omega}{k}\cos\frac{\omega l}{k} - \frac{P\omega^2}{g}\sin\frac{\omega l}{k}},$$

$$D_1 = -r.$$

Il résulte de là que

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 = x + r + & \frac{G\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\omega x}{k}(\cos\omega t + \sin\omega t)}{E\sigma\frac{\omega}{k}\cos\frac{\omega l}{k} - \frac{P\omega^2}{g}\sin\frac{\omega l}{k}} \\ & - r\cos\omega t\,\frac{E\sigma\frac{\omega}{k}\cos\frac{\omega}{k}(l-x) - \frac{P\omega^2}{g}\sin\frac{\omega}{k}(l-x)}{E\sigma\frac{\omega}{k}\cos\frac{\omega l}{k} - \frac{P\omega^2}{g}\sin\frac{\omega l}{k}}. \end{aligned}\right.$$

On a maintenant pour déterminer U les équations suivantes :

$$(27)\qquad \frac{d^2U}{dt^2} = k^2\frac{d^2U}{dx^2},$$

$$(28)\qquad (U)_{x=0} = 0,$$

$$(29)\qquad \frac{P}{g}\left(\frac{d^2U}{dt^2}\right)_{x=l} + E\sigma\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=l} = 0,$$

$$(30)\qquad (U)_{t=0} = \varphi(x) = x - (u_1)_{t=0},$$

$$(31)\qquad \left(\frac{dU}{dt}\right)_{t=0} = \psi(x) = -\left(\frac{du_1}{dt}\right)_{t=0}.$$

On vérifiera l'équation (27) par une somme telle que

$$(32)\qquad U = \sum(A_m\sin mx\sin kmt + B_m\sin mx\cos kmt).$$

Je n'introduis pas de termes multipliés par $\cos mx$, afin de satisfaire tout d'abord à l'équation (28).

La condition (29) conduit ensuite à la relation

$$ml\sin ml = \frac{E\sigma gl}{Pk^2}\cos ml,$$

ou, en appelant p le poids de la tige qui est égal à $\varpi\sigma l$, on a

$$(33)\qquad ml\,\mathrm{tang}\,ml = \frac{p}{P},$$

équation qui détermine les coefficients m.

En faisant $ml = \mu$, on a donc

$$(34) \qquad \mu \operatorname{tang} \mu = \frac{p}{P}.$$

On voit de suite qu'il y a une infinité de valeurs de μ : la première comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$; la deuxième entre π et $\pi + \frac{\pi}{2}$; la troisième entre 2π et $2\pi + \frac{\pi}{2}$, et ainsi de suite. On a donc

$$U = \sum \left(A_\mu \sin \frac{\mu x}{l} \sin \frac{k \mu t}{l} + B_\mu \sin \frac{\mu x}{l} \cos \frac{k \mu t}{l} \right).$$

Les coefficients A_μ et B_μ se déterminent d'après l'état initial et par les méthodes d'élimination connues, en se fondant sur ce que, à cause de l'équation (34), on a toujours, pour deux valeurs différentes μ' et μ'' de μ, satisfaisant à l'équation (34),

$$\int_0^l \cos \frac{\mu' x}{l} \cos \frac{\mu'' x}{l} \, dx = 0,$$

relation qui n'a plus lieu quand $\mu' = \mu''$. On en conclut

$$(35) \qquad A_\mu = \frac{2l}{k\mu(\mu + \sin\mu \cos\mu)} \int_0^l \frac{d\psi(x)}{dx} \cos \frac{\mu x}{l} \, dx,$$

et

$$(36) \qquad B_\mu = \frac{2}{\mu + \sin\mu \cos\mu} \int_0^l \frac{d\varphi(x)}{dx} \cos \frac{\mu x}{l} \, dx.$$

En faisant les calculs, on trouve beaucoup de simplifications : d'une part, à cause de la relation (34), et ensuite en ayant égard à ce que

$$E\sigma \frac{\omega}{k} \cos \frac{\omega l}{k} - \frac{P\omega^2}{g} \sin \frac{\omega l}{k} = \frac{Pk\omega}{gl} \cos \frac{\omega l}{k} \left(\frac{p}{P} - \frac{\omega l}{k} \operatorname{tang} \frac{\omega l}{k} \right).$$

On obtient enfin

$$(37) \qquad A_\mu = -\frac{2l^3 G g \omega \sin \frac{\pi}{4}}{P k^3} \frac{\cos\mu}{\mu(\mu + \sin\mu \cos\mu)\left[\mu^2 - \left(\frac{\omega l}{k}\right)^2\right]},$$

et

$$(38)\qquad B_\mu = \frac{2l^2}{k^2}\frac{1}{(\mu+\sin\mu\cos\mu)\left[\mu^2-\left(\frac{\omega l}{k}\right)^2\right]}\left(-\frac{Gg}{P}\sin\frac{\pi}{4}\cos\mu+\omega^2 r\right).$$

On a donc, en résumé, pour la solution cherchée,

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} u = x + r &+ \frac{G\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\omega x}{k}(\cos\omega t+\sin\omega t)}{E\sigma\frac{\omega}{k}\cos\frac{\omega l}{k}-\frac{P\omega^2}{g}\sin\frac{\omega l}{k}} \\ &- r\cos\omega t\,\frac{E\sigma\frac{\omega}{k}\cos\frac{\omega}{k}(l-x)-\frac{P\omega^2}{g}\sin\frac{\omega}{k}(l-x)}{E\sigma\frac{\omega}{k}\cos\frac{\omega l}{k}-\frac{P\omega^2}{g}\sin\frac{\omega l}{k}} \\ &- \frac{2l^2 Gg\omega\sin\frac{\pi}{4}}{Pk^3}\sum\frac{\cos\mu\sin\frac{\mu x}{l}\sin\frac{k\mu t}{l}}{\mu(\mu+\sin\mu\cos\mu)\left[\mu^2-\left(\frac{\omega l}{k}\right)^2\right]} \\ &+ \frac{2l^2}{k^2}\sum\frac{\left(\omega^2 r-\frac{Gg}{P}\sin\frac{\pi}{4}\cos\mu\right)\sin\frac{\mu x}{l}\cos\frac{k\mu t}{l}}{(\mu+\sin\mu\cos\mu)\left[\mu^2-\left(\frac{\omega l}{k}\right)^2\right]}. \end{aligned}\right.$$

PROBLÈME III.

Oscillations de la corde vibrante.

Les données sont

$$(40)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} = a^2\frac{d^2y}{dx^2}.$$

$$(41)\qquad [(y)_{x=0}=0,\quad (y)_{x=l}=r-r\cos\omega t],$$

$$(42)\qquad \left[(y)_{t=0}=0,\quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0}=0\right].$$

Je fais

$$(43)\qquad y = y_1 + Y,$$

et

$$y_1 = M + Nx + \left(A_1\sin\frac{\omega x}{a}+B_1\cos\frac{\omega x}{a}\right)\cos\omega t.$$

En substituant y_1 pour y dans les deux équations de condition (41), on en tire immédiatement

$$M = 0, \quad N = \frac{r}{l},$$

$$A_1 = -\frac{r}{\sin\frac{\omega l}{a}} \quad \text{et} \quad B_1 = 0.$$

On a donc

$$(44) \qquad y_1 = \frac{rx}{l} - \frac{r\sin\frac{\omega x}{a}\cos\omega t}{\sin\frac{\omega l}{a}}.$$

On a ensuite, pour déterminer Y, les équations

$$(45) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2 Y}{dt^2} = a^2\dfrac{d^2 Y}{dx^2}, \\ (Y)_{x=0} = 0, \quad (Y)_{x=l} = 0, \\ (Y)_{t=0} = \varphi(x) = -(y_1)_{t=0}, \\ \left(\dfrac{dY}{dt}\right)_{t=0} = \psi(x) = -\left(\dfrac{dy_1}{dt}\right)_{t=0}. \end{array}\right.$$

On y satisfait par une expression

$$(46) \qquad Y = \sum\left(A_i \sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi a t}{l} + B_i \sin\frac{i\pi x}{l}\cos\frac{i\pi a t}{l}\right),$$

où les coefficients A_i et B_i se déterminent d'après l'état initial et par les méthodes d'élimination connues. On a

$$A_i = 0 \quad \text{et} \quad B_i = -2r\left(\frac{\omega l}{a}\right)^2 \frac{\cos i\pi}{i\pi\left[(i\pi)^2 - \left(\frac{\omega l}{a}\right)^2\right]},$$

et l'on a en résumé

$$(47) \qquad Y = \frac{rx}{l} - \frac{r\sin\frac{\omega x}{a}\cos\omega t}{\sin\frac{\omega l}{a}} - 2r\left(\frac{\omega l}{a}\right)^2 \sum \frac{\cos i\pi \sin\frac{i\pi x}{l}\cos\frac{i\pi a t}{l}}{i\pi\left[(i\pi)^2 - \left(\frac{\omega l}{a}\right)^2\right]}.$$

PROBLÈME IV.

Je passe maintenant à un exemple relatif à un autre type d'équations aux différences partielles. Il s'agit ici de celle qui régit les vibrations transversales des verges élastiques.

Je suppose une barre, comme une bielle d'accouplement de machines locomotives, dont les deux extrémités reçoivent directement un même mouvement alternatif perpendiculairement à l'axe de la bielle. Il s'agit de déterminer les mouvements moléculaires de toutes les parties de cette bielle.

L'équation aux différences partielles est

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -k^2 \frac{d^4 y}{dx^4}, \tag{48}$$

ou k^2 est un nombre tres-grand dont la valeur est

$$k^2 = \frac{Mg}{\varpi},$$

M étant le moment d'élasticité de cette bielle, g la gravité et ϖ le poids de l'unité de volume de la matière.

Les conditions imposées aux extrémités sont

$$(y)_{x=0} = r \sin \omega t. \tag{49}$$

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=0} = 0, \tag{50}$$

$$(y)_{x=l} = r \sin \omega t, \tag{51}$$

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=l} = 0. \tag{52}$$

Les conditions (50) et (52) expriment qu'aux deux extrémités de la bielle, lesquelles ne sont pas encastrées, le rayon de courbure est infini.

Je suppose de plus qu'à l'origine du mouvement on ait

$$y_{t=0} = 0, \tag{53}$$

et

$$(54)\qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = \omega r.$$

Je ne suppose pas ici, comme dans les problèmes précédents, la vitesse initiale nulle, puisqu'il faut qu'elle soit compatible avec celle qui résulte des conditions imposées aux extrémités.

Je fais maintenant

$$(55)\qquad y = y_1 + Y,$$

et

$$(56)\qquad \left\{ \begin{aligned} y_1 = \Bigg[& A_1 \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{k}}\,x\right) + B_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{k}}\,x\right) \\ & + C_1 \frac{e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}}x} - e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}}x}}{2} + D_1 \frac{e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}}x} + e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}}x}}{2} \Bigg] \sin \omega t. \end{aligned} \right.$$

Je détermine les quatre coefficients A_1, B_1, C_1 et D_1 en substituant y_1 pour y dans les quatre conditions relatives aux extrémités, ce qui donne immédiatement

$$A_1 = \frac{1}{2} r \frac{1 - \cos\sqrt{\frac{\omega}{k}}\,l}{\sin\sqrt{\frac{\omega}{k}}\,l},$$

$$B_1 = \frac{1}{2} r,$$

$$C_1 = r \frac{1 - \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}}l} + e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}}l}\right)}{e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}}l} - e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}}l}},$$

$$D_1 = \frac{1}{2} r,$$

d'où l'on conclut, après quelques réductions,

$$(57)\quad y_1 = \frac{1}{2} r \sin \omega t \left[\frac{\cos\sqrt{\frac{\omega}{k}}\left(x - \frac{l}{2}\right)}{\cos\sqrt{\frac{\omega}{k}}\frac{l}{2}} + \frac{e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}}\left(x - \frac{l}{2}\right)} + e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}}\left(x - \frac{l}{2}\right)}}{e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}}\frac{l}{2}} + e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}}\frac{l}{2}}} \right],$$

On a maintenant pour déterminer Y les équations

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = -k^2\frac{d^4Y}{dx^4},$$

$$(Y)_{x=0} = 0, \quad (Y)_{x=l} = 0,$$

$$\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_{x=l} = 0,$$

$$(Y)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{dY}{dt}\right)_{t=0} = \omega r - \left(\frac{dy_1}{dt}\right)_{t=0}.$$

Poisson a donné la solution, dans tous les cas possibles, de ce dernier genre de question, les conditions imposées aux extrémités ne variant pas avec le temps (*voir* sa *Mécanique* et son *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*, t. VIII des *Mémoires de l'Académie des Sciences*).

On a ici

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} Y = \sum\Bigg[&\left(A_m \sin mx + A'_m \cos mx + B_m \frac{e^{mx}-e^{-mx}}{2} + B'_m \frac{e^{mx}+e^{-mx}}{2}\right)\sin m^2kt \\ &+ \left(C_m \sin mx + C'_m \cos mx + D_m \frac{e^{mx}-e^{-mx}}{2} + D'_m \frac{e^{mx}+e^{-mx}}{2}\right)\cos m^2kt\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

Les conditions imposées aux extrémités conduisent facilement à cette conséquence que tous les coefficients sont nuls, excepté A_m et C_m, et que

$$\sin ml = 0$$

ou

$$(59)\qquad m = \frac{i\pi}{l},$$

i étant un entier quelconque.

Mettant A_i et C_i au lieu de A_m et C_m, on a donc

$$Y = \sum\left[A_i \sin\frac{i\pi x}{l}\sin\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 kt + C_i \sin\frac{i\pi x}{l}\cos\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 kt\right].$$

Les coefficients A_i et C_i se déterminent par les méthodes connues et d'après les valeurs initiales de Y et de $\frac{dY}{dt}$, d'où il résulte

$$C_i = 0$$

et

$$A_i = -2r\left(\frac{\omega l^2}{k}\right)^3 \frac{1-\cos i\pi}{(i\pi)^3\left[(i\pi)^4-\left(\frac{\omega l^2}{k}\right)^2\right]},$$

et l'on a en résumé

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} r \sin\omega t \left[\frac{\cos\sqrt{\frac{\omega}{k}}\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\cos\sqrt{\frac{\omega}{k}}\frac{l}{2}} + \frac{e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}}\left(x-\frac{l}{2}\right)}+e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}}\left(x-\frac{l}{2}\right)}}{e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}}\frac{l}{2}}+e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}}\frac{l}{2}}}\right] \\ &\quad - 2r\left(\frac{\omega l^2}{k}\right)\sum \frac{(1-\cos i\pi)\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 kt}{(i\pi)^3\left[(i\pi)^4-\left(\frac{\omega l^2}{k}\right)^2\right]}, \end{aligned}\right.$$

ce qui est la solution générale de la question proposée.

Il est à remarquer que les intégrations effectuées ont fait disparaître les exponentielles de dessous le signe $\sum$, d'où il résulterait qu'à moins de certaines valeurs particulières de ω, l'ordonnée y ne tendrait pas à croître indéfiniment.

Il n'y aura lieu de tenir compte que des valeurs impaires de i, à cause du facteur $1-\cos i\pi$.

Les données de ce problème pourraient être variées de bien des manières qui toutes se traiteraient par le même procédé.

EXTENSION DU THÉORÈME DE ROLLE

AUX RACINES IMAGINAIRES DES ÉQUATIONS;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Dans une de mes leçons au Collége de France, j'ai eu jadis occasion de montrer comment on peut étendre aux racines imaginaires des équations le théorème célèbre de Rolle concernant les racines réelles, à savoir qu'entre deux racines réelles d'une équation algébrique, il y a au moins une racine réelle de l'équation dérivée. Je vais profiter, pour dire ici quelques mots sur ce sujet, des pages qui restent libres dans cette feuille.

Considérons un polynôme donné

$$z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m$$

dont les coefficients $a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$ sont réels ou imaginaires, c'est-à-dire de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$. Désignons, pour abréger, ce polynôme par $f(z)$ et posons

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

puis

$$f(z) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1},$$

P et Q étant des polynômes réels en x, y. Nous pourrons regarder x et y comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan, et ainsi à chaque imaginaire $x + y\sqrt{-1}$ répondra un point M du plan : réciproquement, à chaque point M du plan répondra une imaginaire $x + y\sqrt{-1}$. Nous distinguerons surtout les points A, B, C,... pour lesquels on aura

$$f(z) = 0,$$

c'est-à-dire dont les coordonnées vérifieront à la fois les deux équa-

tions

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

et les points A′, B′, C′,... pour lesquels la dérivée

$$f'(z)$$

sera nulle : ces derniers points A′, B′, C′,... sont ceux dont les coordonnées satisfont en même temps aux deux équations

$$\frac{dP}{dx} = 0, \quad \frac{dQ}{dx} = 0.$$

Maintenant admettons que deux points A, B, pour chacun desquels on a $f(z) = 0$, puissent être joints dans le plan des x, y par une ligne non interrompue AMB sur laquelle on ait constamment

$$Q = 0,$$

la ligne dont il s'agit étant d'ailleurs droite ou courbe, ou même brisée et formée de parties offrant des angles. Je dis qu'en allant de A en B sur cette ligne AMB, on rencontrera entre les points extrêmes A, B au moins un point tel que A′, pour lequel on aura

$$f'(z) = 0.$$

En effet l'équation

$$Q = 0$$

donne d'abord, pour tous les points de la ligne AMB,

$$\frac{dQ}{dx}\,dx + \frac{dQ}{dy}\,dy = 0,$$

ou bien

$$(1) \qquad \frac{dQ}{dx}\,dx + \frac{dP}{dx}\,dy = 0,$$

attendu que

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{dP}{dx}.$$

Si donc, en un point M de la ligne AMB, cette ligne offre deux

branches faisant un angle, et par conséquent deux tangentes, il faudra nécessairement qu'en ce point l'on ait à la fois

$$\frac{dP}{dx} = 0$$

et

$$\frac{dQ}{dx} = 0,$$

d'où

$$f'(z) = 0.$$

Sans cela, en effet, l'équation différentielle (1), dans laquelle les coefficients

$$\frac{dP}{dx}, \quad \frac{dQ}{dx}$$

n'ont jamais pour chaque point M qu'une valeur unique et finie, ne pourrait fournir qu'une seule tangente. Ainsi, dans le cas d'une ligne anguleuse, notre théorème est démontré tout de suite.

Supposons à présent que nulle part on ne trouve un angle, et que par conséquent, en désignant par ds la différentielle de l'arc AM, les rapports

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}$$

varient d'une manière continue quand l'arc s grandit par le mouvement de M vers B. Le polynôme P, qui est nul en A et en B, peut croître ou décroître quand on marche de A vers B; mais s'il a crû au commencement, il doit ensuite décroître, et, s'il a décrû, croître pour se retrouver au point B avec la même valeur qu'au point A. Il faut donc que la différentielle

$$\left(\frac{dP}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dP}{dy}\frac{dy}{ds}\right) ds$$

change quelque part de signe dans l'intervalle de A à B. Le facteur ds est essentiellement positif. C'est donc l'autre facteur qui doit changer de signe; et comme les fonctions

$$\frac{dP}{dx}, \quad \frac{dP}{dy}, \quad \frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}$$

sont continues, ce n'est qu'en s'évanouissant qu'il pourra le faire. Il y aura donc entre A et B, sur la ligne AMB, au moins un point M pour lequel on aura

$$\frac{dP}{dx}dx + \frac{dP}{dy}dy = 0,$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad \frac{dP}{dx}dx - \frac{dQ}{dx}dy = 0,$$

puisque les deux dérivées partielles

$$\frac{dP}{dy}, \quad \frac{dQ}{dx}$$

ont des valeurs égales et de signes contraires.

Or, des équations (1) et (2), qui ont lieu au point M toutes les deux, on tire sans peine, en élevant au carré et ajoutant,

$$\left[\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right](dx^2 + dy^2) = 0,$$

et comme $dx^2 + dy^2$ (ou ds^2) ne peut pas se réduire à zéro, il faut en conclure qu'au point M dont nous nous occupons on a à la fois

$$\frac{dP}{dx} = 0$$

et

$$\frac{dQ}{dx} = 0,$$

partant

$$f'(z) = 0,$$

en sorte que le point M n'est autre chose qu'un des points A′, B′, C′,... définis plus haut. Le théorème énoncé ci-dessus est donc complétement démontré.

Le théorème de Rolle est un cas particulier du nôtre. Supposez, en effet, que les coefficients $a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$ soient réels. Alors le polynôme Q sera de la forme y·R, R étant aussi un polynôme entier. Si

donc on a deux racines réelles de $f(z) = 0$, elles répondront à deux points A, B situés sur l'axe des x, axe sur lequel on a $y = 0$, partant $Q = 0$. Donc, entre A et B, sur l'axe des x, il y aura au moins un point A′ pour lequel la dérivée $f'(z)$ sera égale à zéro. Autrement dit, entre deux racines réelles de $f(z) = 0$, il y a au moins une racine réelle de $f'(z) = 0$. C'est le théorème de Rolle.

Notre théorème (comme celui de Rolle) peut être étendu, sous des conditions faciles à comprendre d'après la démonstration qui précède, aux équations transcendantes.

Ajoutons que, sans même sortir du cercle des équations algébriques, on pourrait donner à l'énoncé une forme plus générale (en apparence du moins, car au fond c'est toujours le même théorème). Pour cela, faisons

$$\lambda P + \mu Q = U$$

et

$$\nu P + \rho Q = V,$$

λ, μ, ν, ρ désignant des constantes quelconques, pour lesquelles cependant on n'ait pas

$$\lambda\rho - \mu\nu = 0.$$

Soient b et c deux autres constantes quelconques. Si l'on peut joindre par une ligne non interrompue GLH, le long de laquelle on ait partout $U = b$, deux points G, H pour lesquels V prenne la même valeur c, je dis qu'il y aura entre G et H, sur la ligne GLH, au moins un point A′, répondant à l'équation $f'(z) = 0$.

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n, on demande une expression simple du nombre

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2)$$

des représentations de n par la forme à six variables

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2,$$

c'est-à-dire du nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2,$$

où x, y, z, t, u, v sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Pour répondre à cette question, il convient de mettre en évidence les facteurs 2 et 3, quand ils entrent dans la composition de n. Nous poserons donc

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

les exposants α, β pouvant se réduire à zéro, et m désignant un entier impair, premier à 3, par conséquent un entier de l'une ou de l'autre des deux formes linéaires

$$6k + 1, \quad 6k - 1.$$

Nous aurons à nous servir du symbole

$$\left(\frac{m}{3}\right)$$

de Legendre. On sait que

$$\left(\frac{m}{3}\right) = 1$$

quand

$$m = 6k + 1,$$

et qu'au contraire

$$\left(\frac{m}{3}\right) = -1$$

quand

$$m = 6k - 1.$$

La valeur de

$$\left(\frac{m}{3}\right)$$

influe sur celle du nombre demandé

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2\right),$$

et les exposants α, β jouent aussi un rôle dans la question. Mais on a surtout à considérer une certaine fonction numérique de m, proportionnellement à laquelle

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2\right)$$

varie pour le système infini des entiers $2^\alpha 3^\beta m$ qui répondent à des valeurs données de α, β et de m (mod. 6). Si l'on décompose

$$m$$

de toutes les manières possibles en un produit

$$d\delta$$

de deux facteurs conjugués, la fonction numérique dont je parle s'exprimera par

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

Il est donc bon d'entrer dans quelques détails sur cette fonction numérique importante.

2. Quand m est de la forme $6k+1$, on a

$$\left(\frac{\delta}{3}\right) = \left(\frac{d}{3}\right),$$

d'où

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2 = \sum \left(\frac{d}{3}\right) d^2.$$

La fonction numérique

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2$$

exprime donc alors l'excès de la somme des carrés des diviseurs de m qui sont $\equiv 1 \pmod{6}$ sur celle des carrés des diviseurs de m qui sont au contraire $\equiv -1 \pmod{6}$.

L'inverse a lieu quand m est de la forme $6k-1$, ce qui donne

$$\left(\frac{\delta}{3}\right) = -\left(\frac{d}{3}\right),$$

d'où

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2 = -\sum \left(\frac{d}{3}\right) d^2.$$

Dans ce dernier cas, notre fonction représente l'excès de la somme des carrés des diviseurs de m qui sont $\equiv -1 \pmod{6}$ sur celle des carrés des diviseurs de m qui sont $\equiv 1 \pmod{6}$.

La fonction

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2$$

est égale à l'unité quand $m=1$. Quand $m = a^\alpha b^\beta \ldots$, a, b, etc., désignant des nombres premiers distincts, la somme qu'elle désigne peut être remplacée par un produit dont les facteurs dépendent respectivement de a, b, etc., et que, d'après une notation souvent employée, nous pouvons écrire ainsi :

$$\Pi\left[a^{2\mu} + \left(\frac{a}{3}\right) a^{2\mu-2} + a^{2\mu-4} + \left(\frac{a}{3}\right) a^{2\mu-6} + \ldots\right].$$

On voit, par cette expression en produit, que la fonction

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2$$

est du genre de celles que nous disons *décomposables en facteurs*. On voit aussi qu'elle a toujours une valeur positive; et c'est pour cela que nous la préférons à la fonction

$$\sum \left(\frac{d}{3}\right) d^2$$

qui lui est numériquement égale, mais dont la valeur est tantôt positive, tantôt négative.

Je ferai encore observer qu'en donnant au symbole de Legendre la signification plus étendue que lui attribue Jacobi, on a

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2 = \sum \left(\frac{-3}{\delta}\right) d^2.$$

Cette remarque nous servira plus tard à mettre en évidence certaines analogies dont nous ne voulons pas nous occuper ici.

Pour $m = 5, 7, 11, 13$, etc., la fonction

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2$$

prend les valeurs suivantes : 24, 50, 120, 170, etc.

3. Maintenant revenons à l'expression cherchée de

$$N\left(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2\right),$$

et, pour plus de clarté, passons graduellement du cas le plus simple au cas général. Simplifions d'ailleurs l'écriture en mettant

$$N\left(2^\alpha 3^\beta m\right)$$

au lieu de

$$N\left(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2\right).$$

Cette notation abrégée ne pourra tromper personne. En l'employant dans cet article et dans les articles suivants, nous ne l'appliquerons à la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2$$

qu'en ayant soin chaque fois de rappeler le sens que nous y attachons. On n'a donc aucune confusion à craindre.

Cela étant, soit d'abord $\alpha = 0$, $\beta = 0$, c'est-à-dire occupons-nous de la valeur de

$$N(m),$$

m désignant un entier impair et premier à 3. J'obtiens pour ce cas la formule ci-après

$$(1) \qquad N(m) = \left[9 + \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

En d'autres termes, on a

$$N(m) = 10 \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

quand

$$m = 6k + 1;$$

mais

$$N(m) = 8 \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

quand

$$m = 6k - 1.$$

Ainsi, pour $m = 1$, on doit avoir

$$N(1) = 10;$$

et cela est confirmé par l'identité

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 3.0^2,$$

où l'on peut mettre $(\pm 1)^2$ à cinq places différentes.

En passant au nombre 5, on trouve

$$N(5) = 8.24 = 192.$$

Or les identités

$$5 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3.0^2,$$
$$5 = 2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 3.0^2,$$
$$5 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 3.1^2,$$

en affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables, fournissent en effet cent quatre-vingt-douze représentations de l'entier 5 par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2,$$

la première identité donnant trente-deux représentations et chacune des deux autres en donnant quatre-vingts.

En continuant, on obtiendrait

$$N(7) = 10.50 = 500,$$

puis

$$N(11) = 8.120 = 960,$$

et ainsi de suite. Mais je n'insiste pas sur ces applications numériques.

4. Pour les entiers impairs multiples de 3, la valeur de

$$N(3^\beta m)$$

n'est guère moins simple. Je trouve, en effet, que

$$(2) \qquad N(3^\beta m) = \left[9^{\beta+1} + \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

La formule (2) reste exacte pour $\beta = 0$. Elle se réduit alors à la formule (1), qu'elle peut par conséquent remplacer, tout en ayant plus d'étendue.

Lorsqu'on veut distinguer les deux cas de $m \equiv 1 \pmod{6}$ et de $m \equiv -1 \pmod{6}$, la formule (2) se décompose ainsi qu'il suit : on a

$$N(3^\beta m) = (9^{\beta+1} + 1) \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

quand

$$m = 6k + 1;$$

mais

$$N(3^\beta m) = (9^{\beta+1} - 1) \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

quand

$$m = 6k - 1.$$

En prenant $m = 1$, $\beta = 1$, cela donne

$$N(3) = 82,$$

résultat confirmé par les deux identités

$$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 3.0^2$$

et

$$3 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 3.1^2,$$

qui fournissent quatre-vingt-deux représentations de l'entier 3 par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2,$$

si l'on a soin d'affecter du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et d'opérer les permutations convenables. On s'assurera de même que

$$N(9) = 9^3 + 1 = 730, \quad N(15) = 80.24 = 1920, \quad \text{etc.},$$

conformément à la formule (2). Je ne m'arrêterai pas à développer ces exemples.

5. La formule

$$(2) \qquad N(3^\beta m) = \left[9^{\beta+1} + \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2$$

peut être établie directement pour une valeur quelconque de β; mais on peut aussi démontrer d'abord la formule

$$(1) \qquad N(m) = \left[9 + \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2$$

puis en tirer l'équation (2) en prouvant que

$$(3) \qquad N(3^\beta m) = \frac{9^{\beta+1} + \left(\frac{m}{3}\right)}{9 + \left(\frac{m}{3}\right)} N(m).$$

Ajoutons que l'équation (3) peut être rendue plus générale; car elle s'étend aux nombres pairs. En d'autres termes, q désignant un nombre premier à 3, mais d'ailleurs pair ou impair, on a de même

$$(4) \qquad N(3^\beta q) = \frac{9^{\beta+1} + \left(\frac{q}{3}\right)}{9 + \left(\frac{q}{3}\right)} N(q).$$

L'équation (4) nous débarrasse des difficultés provenant du facteur 3; et si nous avions trouvé pour tout entier $2^\alpha m$, pair et premier à 3, la valeur de

$$N(2^\alpha m),$$

nous en conclurions sans peine celle de

$$N(2^\alpha 3^\beta m).$$

La question à laquelle cet article est surtout consacré, et qui déjà est résolue pour les entiers impairs, le serait donc aussi pour les entiers pairs.

6. Occupons-nous donc des entiers pairs, premiers à 3, et commençons par l'entier impairement pair $2m$. J'obtiens à ce sujet la formule suivante :

$$(5) \qquad N(2m) = 5\left[9 - \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

Ainsi, par exemple,

$$N(2) = 40;$$

ce qu'on vérifiera au moyen de l'identité

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 3.0^2,$$

en y effectuant les permutations convenables.

De là encore

$$N(10) = 50.24 = 1200.$$

Ici on a les identités

$$10 = 1^2 + 3^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 3.0^2,$$
$$10 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 + 3.0^2.$$
$$10 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 + 3.1^2.$$

On y donnera le double signe $\pm$ aux racines des carrés qui ne sont pas nuls et on y opérera les permutations convenables. La première identité fournira ainsi quatre-vingts représentations de l'entier 10 par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2;$$

la seconde en fournira quatre cent quatre-vingts et la troisième six cent quarante. Or

$$80 + 480 + 640 = 1200.$$

L'équation

$$N(10) = 1200$$

est donc exacte.

En combinant la formule (5) et la formule (4), dans laquelle on prendra $q = 2m$, nous obtiendrons la valeur de

$$N(2.3^\beta m).$$

Il faudra se souvenir que

$$\left(\frac{2m}{3}\right) = -\left(\frac{m}{3}\right),$$

et alors on trouvera

$$(6) \qquad N(2.3^\beta m) = 5\left[9^{\beta+1} - \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

Par exemple,

$$N(6) = 400,$$

ce qu'on vérifiera sans peine au moyen des identités

$$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 3.0^2$$

et

$$6 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 3.1^2;$$

la première fournit deux cent quarante représentations, la seconde en fournit cent soixante.

7. Relativement aux entiers pairement pairs, premiers ou non à 3, voici les résultats qu'on obtient. Ces entiers peuvent être représentés par

$$2^{2\gamma+2}3^{\beta}m,$$

ou par

$$2^{2\gamma+3}3^{\beta}m,$$

suivant que 2 y entre avec un exposant pair, ou avec un exposant impair. Or je trouve, d'une part,

$$(7) \qquad N(2^{2\gamma+2}3^{\beta}m) = \frac{1}{5}(4^{2\gamma+3} - 9)\,N(3^{\beta}m),$$

et, d'autre part,

$$(8) \qquad N(2^{2\gamma+3}3^{\beta}m) = \frac{1}{25}(4^{2\gamma+4} + 9)\,N(2\,.\,3^{\beta}m).$$

En portant dans l'équation (7) la valeur de

$$N(3^{\beta}m)$$

fournie par l'équation (2), on a donc

$$(9) \qquad N(2^{2\gamma+2}3^{\beta}m) = \frac{1}{5}\left[9^{\beta+1} + \left(\frac{m}{3}\right)\right](4^{2\gamma+3} - 9)\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2.$$

Portant ensuite dans la formule (8) la valeur de

$$N(2\,.\,3^{\beta}m)$$

fournie par l'équation (6), on a semblablement

$$(10)\quad N(2^{2\gamma+3}3^{\beta}m) = \frac{1}{5}\left[9^{\beta+1} - \left(\frac{m}{3}\right)\right](4^{2\gamma+1}+9)\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2.$$

Et ces formules (9), (10) peuvent se résumer dans la formule unique

$$(11)\quad N(2^{\alpha}3^{\beta}m) = \frac{1}{5}\left[9^{\beta+1} + (-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[4^{\alpha+1} - (-1)^{\alpha}\cdot 9\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2,$$

sur laquelle nous allons présenter quelques remarques.

La formule (11) a été établie à l'occasion des nombres pairement pairs; il semblerait donc qu'on dût nécessairement y supposer $\alpha > 1$. Cependant elle est vraie aussi pour $\alpha = 1$; car elle coïncide alors avec la formule (6). Ainsi elle comprend la formule (6) qu'on peut dorénavant mettre de côté. Mais on ne peut pas y faire $\alpha = 0$; le cas de $\alpha = 0$ est résolu séparément par la formule (2). Les formules (2) et (11) (dans chacune desquelles on peut faire $\beta = 0$) répondent donc, l'une aux entiers impairs, l'autre aux entiers pairs, et partant, à elles deux, suffisent à tout.

Au reste, il serait facile de les comprendre en une seule et même équation; car le résultat que donne la formule (11), quand on y suppose $\alpha = 0$, n'est inexact que par le signe. Or on a

$$(-1)^{2^{\alpha}} = 1$$

pour $\alpha > 0$, et

$$(-1)^{2^{\alpha}} = -1$$

pour $\alpha = 0$. En substituant à la formule (11) celle-ci :

$$(12)\quad N(2^{\alpha}3^{\beta}m) = \frac{1}{5}(-1)^{2^{\alpha}}\left[9^{\beta+1} + (-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[4^{\alpha+1} - (-1)^{\alpha}\cdot 9\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2,$$

on aura donc une formule unique, applicable à tous les cas possibles.

Je me bornerai à un seul exemple, celui du nombre 4. La formule (12) donne

$$N(4) = 2(4^3 - 9) = 110.$$

Or les identités

$$4 = 2^2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 3 \,.\, 0^2,$$
$$4 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0 + 3 \,.\, 0^2,$$
$$4 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 3 \,.\, 1^2,$$

où l'on doit opérer les permutations convenables, et affecter du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls, fournissent effectivement cent dix représentations de l'entier 4 par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2;$$

la première en fournit dix, la seconde quatre-vingts, la troisième vingt.

8. Jusqu'ici nous n'avons cherché que le nombre total

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha 3^\beta m\right)$$

des solutions propres ou impropres de l'équation

$$2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2.$$

On peut désirer aussi d'avoir séparément le nombre

$$\mathrm{M}\left(2^\alpha 3^\beta m\right)$$

des solutions propres, c'est-à-dire des solutions exprimées par des valeurs de x, y, z, t, u, v, non divisibles à la fois par un facteur commun > 1. Alors, au lieu de la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

il faut introduire le produit

$$\prod \left[a^{2\mu} + \left(\frac{a}{3}\right) a^{2\mu - 2}\right].$$

relatif aux facteurs premiers de l'entier

$$m = a^\mu b^\nu, \ldots;$$

puis poser

$$M(2^\alpha 3^\beta m) = C(\alpha, \beta, m) \prod \left[a^{2\mu} + \left(\frac{a}{3}\right) a^{2\mu-2}\right].$$

où

$$C(\alpha, \beta, m)$$

est une fonction de α, de β et de m (mod. 6) dont nous allons donner l'expression en distinguant les cas divers de $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha > 2$.

Pour $\alpha = 0$, on a

$$C(0, 0, m) = 9 + \left(\frac{m}{3}\right),$$

puis

$$C(0, 1, m) = 81 + \left(\frac{m}{3}\right),$$

et enfin, quand β est > 1,

$$C(0, \beta, m) = 80 \,.\, 9^{\beta-1}.$$

Pour $\alpha = 1$, on a

$$C(1, 0, m) = 5\left[9 - \left(\frac{m}{3}\right)\right],$$

puis

$$C(1, 1, m) = 5\left[81 - \left(\frac{m}{3}\right)\right],$$

et enfin, quand β est > 1,

$$C(1, \beta, m) = 400 \,.\, 9^{\beta-1}.$$

Pour $\alpha = 2$, on a

$$C(2, 0, m) = 10\left[9 + \left(\frac{m}{3}\right)\right],$$

puis

$$C(2, 1, m) = 10\left[81 + \left(\frac{m}{3}\right)\right],$$

et enfin, quand β est > 1,

$$C(2, \beta, m) = 800 \,.\, 9^{\beta-1}.$$

Pour $\alpha > 2$, on a

$$C(\alpha, 0, m) = 15.4^{\alpha-1}\left[9 + (-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{3}\right)\right],$$

puis

$$C(\alpha, 1, m) = 15.4^{\alpha-1}\left[81 + (-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{3}\right)\right],$$

et enfin, quand β est > 1,

$$C(\alpha, \beta, m) = 75 \cdot 4^{\alpha+1} \cdot 9^{\beta-1}.$$

9. Cherchons encore le nombre

$$\mathfrak{N}(2^{\alpha}3^{\beta}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2)$$

des solutions dont l'équation

$$2^{\alpha}3^{\beta}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2$$

jouit quand on n'y admet pour x, y, z, t, u, v que des valeurs entières et positives. Il est bien clair que l'on n'a de telles solutions que quand l'exposant α est au moins égal à 3. Soit donc $\alpha = \varepsilon + 3$. Il s'agit de donner une expression simple de

$$\mathfrak{N}(8 \cdot 2^{\varepsilon}3^{\beta}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2)$$

ou, pour abréger, de

$$\mathfrak{N}(8 \cdot 2^{\varepsilon}3^{\beta}m).$$

Or, je trouve que

$$\mathfrak{N}(8 \cdot 2^{\varepsilon}3^{\beta}m)$$

s'exprime par

$$2^{2\varepsilon-3}(9^{\beta+1} \pm 1)\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2,$$

le signe supérieur devant être employé quand $2^{\varepsilon}m$ n'est pas résidu quadratique de 3, tandis que quand $2^{\varepsilon}m$ est résidu on doit prendre le signe inférieur.

En d'autres termes, on a

$$(13)\qquad \mathfrak{N}(8 \,.\, 2^{\varepsilon} 3^{\beta} m) = 2^{2\varepsilon-3}\left[9^{\beta+1} - (-1)^{\varepsilon}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

Cette équation résout la question proposée. On peut y faire $\varepsilon = 0$, et aussi $\beta = 0$.

L'équation (13) donne

$$\mathfrak{N}(8) = 1,$$

résultat confirmé par l'équation

$$8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3 \,.\, 1^2.$$

Elle donne aussi

$$\mathfrak{N}(16) = 5;$$

ce qui s'accorde avec les identités

$$\begin{aligned}
16 &= 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3 \,.\, 1^2,\\
16 &= 1^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3 \,.\, 1^2,\\
16 &= 1^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 3 \,.\, 1^2,\\
16 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2 + 3 \,.\, 1^2,\\
16 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3 \,.\, 1^2.
\end{aligned}$$

J'en tire encore

$$\mathfrak{N}(24) = 10;$$

or on vérifiera aisément l'exactitude de ce dernier résultat au moyen de l'identité

$$24 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + 3 \,.\, 1^2,$$

en y effectuant les permutations qu'elle comporte.

10. Si, tout en continuant à ne prendre pour valeurs de x, y, z, t, u, v que des entiers impairs et positifs, on imposait en outre à ces entiers la condition de n'être pas tous divisibles par un même facteur > 1, le nombre

$$\mathfrak{M}(8 \,.\, 2^{\varepsilon} 3^{\beta} m)$$

des solutions que l'équation

$$8 \,.\, 2^{\varepsilon} 3^{\beta} m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2$$

conserverait dans ces conditions nouvelles pourrait devenir inférieur à

$$\mathfrak{M}(8 \,.\, 2^{\varepsilon} 3^{\beta} m),$$

et voici comment on le déterminerait.

Introduisons de nouveau le produit

$$\prod \left[a^{2\mu} + \left(\frac{a}{3}\right) a^{2\mu-2} \right],$$

relatif aux facteurs premiers de l'entier $m = a^{\mu} b^{\nu}, \ldots$, et posons

$$\mathfrak{M}(8 \,.\, 2^{\varepsilon} 3^{\beta} m) = \mathrm{D}(\varepsilon, \beta, m) \prod \left[a^{2\mu} + \left(\frac{a}{3}\right) a^{2\mu-2} \right].$$

Le facteur

$$\mathrm{D}(\varepsilon, \beta, m)$$

sera une fonction numérique très-simple de ε, de β et de m (mod. 6). On a

$$\mathrm{D}(\varepsilon, 0, m) = 2^{2\varepsilon-3} \left[9 - (-1)^{\varepsilon} \left(\frac{m}{3}\right) \right],$$

puis

$$\mathrm{D}(\varepsilon, 1, m) = 2^{2\varepsilon-3} \left[81 - (-1)^{\varepsilon} \left(\frac{m}{3}\right) \right];$$

enfin, pour $\beta > 1$,

$$\mathrm{D}(\varepsilon, \beta, m) = 5 \,.\, 2^{2\varepsilon+1} \,.\, 9^{\beta-1}.$$

Je me dispenserai d'ajouter des exemples.

SUR LA FORME

$$x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2);$$

Par M. J. LIOUVILLE.

---

1. On demande une expression simple du nombre des représentations d'un entier donné n par la forme à six variables

$$x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

c'est-à-dire du nombre

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

où x, y, z, t, u, v sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Il sera facile de répondre à cette question, si l'on se souvient de ce que nous avons dit dans l'article précédent (dont nous conserverons ici toutes les notations) au sujet du nombre

$$\mathrm{N}(n)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2.$$

Mais d'abord observons que l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

est évidemment impossible quand n est de la forme $3g + 2$, de ma-

nière que

$$N[3g+2=x^2+3(y^2+z^2+t^2+u^2+v^2)]=0.$$

Il ne faut donc s'occuper que des entiers multiples de 3 et des entiers $\equiv 1 \pmod{3}$.

L'équation

$$3n=x^2+3(y^2+z^2+t^2+u^2+v^2)$$

exige que x soit multiple de 3; et, en posant $x=3x_1$, elle se change en celle-ci :

$$n=y^2+z^2+t^2+u^2+v^2+3x_1^2,$$

qui lui est parfaitement équivalente et dont le nombre

$$N(n)$$

de solutions a été déterminé. L'équation

$$N[3n=x^2+3(y^2+z^2+t^2+u^2+v^2)]=N(n)$$

répond donc à la question actuelle, en tant qu'il s'agit d'un entier multiple de 3.

Le cas des entiers $\equiv 1 \pmod{3}$ offre plus de difficulté; j'ai pourtant réussi à le résoudre en prouvant que

$$N[3g+1=x^2+3(y^2+z^2+t^2+u^2+v^2)]$$

vaut précisément le cinquième de

$$N(3g+1=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+3v^2),$$

c'est-à-dire, d'après notre notation, en prouvant que

$$N[3g+1=x^2+3(y^2+z^2+t^2+u^2+v^2)]=\frac{1}{5}N(3g+1).$$

2. Les quelques lignes qui précèdent pourraient paraître suffisantes; mais il ne sera pas inutile, je crois, de donner explicitement les formules qui en résultent.

Posons

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant un entier impair, non divisible par 3. Si l'on a $\beta > 0$, la valeur de

$$N\left[2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

sera, comme on vient de le voir, égale à celle de

$$N(2^\alpha 3^{\beta-1} m).$$

En appliquant la formule (12) de l'article précédent, on obtiendra donc (dans le cas de $\beta > 0$) pour

$$N\left[2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

l'expression suivante

$$\frac{1}{5}(-1)^{2^\alpha}\left[9^\beta + (-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[4^{\alpha+1} - (-1)^\alpha \cdot 9\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2.$$

On admet pour α la valeur zéro comme toute autre valeur, et il importe peu que l'entier $2^\alpha 3^\beta m$ soit pair ou impair. Mais il est bien remarquable que cette expression reste exacte même quand $\beta = 0$, en sorte que la valeur de

$$N\left[2^\alpha m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

est

$$\frac{1}{5}(-1)^{2^\alpha}\left[1 + (-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[4^{\alpha+1} - (-1)^\alpha \cdot 9\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2.$$

En effet, quand $2^\alpha m$ est de la forme $3g + 2$, on a

$$(-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right) = \left(\frac{2^\alpha m}{3}\right) = -1,$$

d'où

$$1 + (-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right) = 0,$$

ce qui s'accorde bien avec l'équation

$$N[3g+2 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2) = 0;$$

et quand $2^\alpha m$ est de la forme $3g+1$, on a

$$(-1)^\alpha \left(\frac{m}{3}\right) = \left(\frac{2^\alpha m}{3}\right) = 1,$$

d'où

$$1 + (-1)^\alpha \left(\frac{m}{3}\right) = 2,$$

ce qui conduit pour

$$N\left[2^\alpha m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

à la valeur ci-après

$$\frac{2}{5}(-1)^{2\alpha}\left[4^{\alpha+1} - (-1)^\alpha \cdot 9\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d^2,$$

laquelle est exacte, car c'est précisément (dans les conditions admises) celle de

$$\frac{1}{5} N(2^\alpha m).$$

Quelques exemples numériques suffiront, je pense. Notre méthode donne

$$N[1 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 2,$$

ce qui est évident à priori; puis

$$N[3 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 10,$$

ce qui s'accorde avec l'identité

$$3 = 0^2 + 3[(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$

où l'on peut mettre $(\pm 1)^2$ à cinq places distinctes; ensuite

$$N[4 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 22,$$

résultat dont on vérifiera l'exactitude au moyen de l'identité

$$4 = (\pm 2)^2 + 3(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2)$$

qui donne deux représentations de l'entier 4 par la forme qui nous occupe, et de l'identité

$$4 = 1^2 + 3(1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$

qui en fournira vingt, en y affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en y opérant les permutations convenables. Nous terminerons par

$$N[6 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 40,$$

et, cette fois, c'est de l'identité

$$6 = 0^2 + 3(1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2)$$

qu'il faudra se servir.

3. Je ne m'arrêterai pas à chercher séparément le nombre des solutions propres de l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

non que cette recherche soit difficile : elle est seulement fastidieuse, à cause des cas divers qu'il faut distinguer ; je m'en réfère donc sur ce point à la méthode générale qui s'offre d'elle-même. Mais je veux dire quelques mots d'une autre question qui a de l'intérêt, et déterminer le nombre

$$\mathfrak{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

des solutions que l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

conserve quand on n'admet pour valeurs de x, y, z, t, u, v que des entiers impairs et positifs. Cela suppose évidemment n multiple de 8,

sans quoi il n'y aurait pas de telles solutions; il faut écarter aussi le cas de $n = 3g + 2$. Enfin je mets de côté le cas trop facile de n multiple de 3. Je n'ai plus dès lors que deux suppositions à faire

$$n = 8.2^{2\gamma}(6k - 1)$$

et

$$n = 8.2^{2\gamma+1}(6k + 1),$$

la valeur $\gamma = 0$ étant admise comme toute autre valeur entière > 0.

Quand

$$n = 8.2^{2\gamma}(6k - 1),$$

je forme la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier

$$6k - 1 = d\delta,$$

et j'obtiens pour

$$\mathfrak{N}\left[8.2^{2\gamma}(6k - 1) = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

l'expression que voici

$$4^{2\gamma-1} \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

Ainsi, en prenant $\gamma = 0$, $k = 1$, on a

$$\mathfrak{N}\left[8.5 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right] = 6,$$

ce qui est confirmé par les identités

$$40 = 5^2 + 3(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)$$

et

$$40 = 1^2 + 3(3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$

dans la seconde desquelles on peut mettre 3^2 à cinq places distinctes.

En prenant $\gamma = 0$, $k = 2$, on trouve ensuite

$$\mathfrak{N}\left[8.11 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right] = 30;$$

ce que l'on vérifie au moyen des identités

$$88 = 1^2 + 3(5^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$88 = 1^2 + 3(3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$88 = 5^2 + 3(3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$88 = 7^2 + 3(3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$

en y effectuant les permutations qu'elles comportent.

Soit enfin $\gamma = 1$, $k = 1$; il nous viendra

$$\mathfrak{D}[160 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 96;$$

et l'on s'assurera que cette valeur est exacte, au moyen des identités ci-après :

$$160 = 1^2 + 3(7^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$160 = 1^2 + 3(5^2 + 5^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$160 = 1^2 + 3(5^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2),$$
$$160 = 5^2 + 3(5^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$160 = 5^2 + 3(3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2),$$
$$160 = 7^2 + 3(5^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$160 = 7^2 + 3(3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2),$$
$$160 = 11^2 + 3(3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$

où l'on opérera, bien entendu, les permutations convenables.

Quand

$$n = 8.2^{2\gamma+1}(6k+1),$$

formez de même la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2$$

relative aux diviseurs conjugués de l'entier

$$6k + 1 = d\delta.$$

La valeur de

$$\mathfrak{N}\left[8.2^{2\gamma+1}(6k+1) = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

sera

$$16^{\gamma} \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

Ainsi, par exemple,

$$\mathfrak{N}\left[16 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right] = 1;$$

l'identité

$$16 = 1^2 + 3(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)$$

confirme ce fait.

L'équation

$$\mathfrak{N}\left[64 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right] = 16,$$

que notre formule donne aussi, est confirmée à son tour par les identités

$$64 = 1^2 + 3(3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$64 = 5^2 + 3(3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$64 = 7^2 + 3(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$

dont les deux premières comportent des permutations.

On trouve encore

$$\mathfrak{N}\left[16.7 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right] = 50;$$

et la vérification est facile au moyen des identités

$$112 = 1^2 + 3(5^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$112 = 1^2 + 3(3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2),$$
$$112 = 5^2 + 3(5^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$112 = 5^2 + 3(3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$112 = 7^2 + 3(3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2),$$

où l'on effectuera les permutations convenables.

J'ajouterai que pour les représentations à indéterminées impaires dont nous venons de nous occuper, concernant la forme

$$x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

et les deux classes d'entiers

$$8.2^{2\gamma}(6k - 1), \quad 8.2^{2\gamma+1}(6k + 1),$$

la question du nombre des représentations propres est facile. Il suffit de remplacer la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2$$

par le produit

$$\prod \left[a^{2\mu} + \left(\frac{a}{3}\right) a^{2\mu-2}\right]$$

relatif aux facteurs premiers de $6k - 1$ ou de $6k + 1$ mis sous la forme $a^\mu b^\nu \ldots$; les coefficients restent les mêmes.

4. La méthode que nous avons indiquée au n° 1 pour arriver à la valeur de

$$N[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

paraît assez simple : le lemme sur lequel elle repose est d'ailleurs aisé à démontrer. Peut-être est-il bon pourtant d'avertir que nous aurions pu suivre une autre route en rattachant l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

à ces deux-ci :

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2$$

et

$$3n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2,$$

dont les nombres de solutions

$$N(n), \quad N(3n)$$

sont connus. On a, en effet,

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = \frac{1}{9}[10\mathrm{N}(n) - \mathrm{N}(3n)].$$

Cette relation est vérifiée par la valeur donnée plus haut pour son premier membre. Mais elle est susceptible aussi d'une démonstration *à priori*, et en l'établissant ainsi on arrive directement à l'expression générale de

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)].$$

Si l'on voulait se borner aux valeurs impaires et positives de x, y, z, t, u, v, on trouverait de même

$$\mathfrak{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = \frac{1}{9}[10\mathfrak{N}(n) - \mathfrak{N}(3n)].$$

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n, on demande une expression simple du nombre des représentations de n par la forme à six variables

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2,$$

c'est-à-dire du nombre

$$\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2,$$

où x, y, z, t, u, v sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Comme les facteurs 2 et 3, quand ils entrent dans n, jouent un rôle à part, nous ferons

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m désignant un entier impair et premier à 3, après quoi nous introduirons la somme

$$\sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier

$$m = d\delta.$$

Nous distinguerons d'ailleurs les deux cas de

$$\alpha = 0$$

et de

$$\alpha > 0.$$

2. Soit d'abord $\alpha = 0$, en sorte qu'il s'agisse d'un entier impair $3^\beta m$. Je trouve pour

$$N(3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 3v^2)$$

la valeur suivante

$$\left[9^{\beta+1} - \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

On peut supposer $\beta = 0$, et alors on voit que

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2)$$

s'exprime par

$$\left[9 - \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

c'est-à-dire par

$$8 \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

quand

$$m = 6k + 1,$$

et par

$$10 \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2$$

quand

$$m = 6k - 1.$$

Ainsi, par exemple, on a

$$N(1 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2) = 8,$$

et cela s'accorde avec l'identité

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0.0 + 2.0^2,$$

dans laquelle on peut mettre $(\pm 1)^2$ à quatre places distinctes. Je me contenterai de ce seul exemple.

5. Passons aux entiers pairs exprimés par $2^\alpha 3^\beta m$, sous la condition de $\alpha > 0$. J'obtiens pour

$$N(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2),$$

sous cette condition de $\alpha > 0$, et quel que soit β, l'expression ci-après :

$$\frac{3}{5}\left[9^{\beta+1} - (-1)^\alpha \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{2\alpha+1} + (-1)^\alpha . 3\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

Pour $\beta = 0$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier pair non multiple de 3, la valeur de

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2)$$

est donc

$$\frac{3}{5}\left[9 - (-1)^\alpha \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{2\alpha+1} + (-1)^\alpha . 3\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

Le cas le plus simple est celui de $\alpha = 1$. On trouve le nombre

$$N(2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2)$$

égal à

$$3\left[9 + \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

c'est-à-dire égal à

$$30 \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2$$

quand

$$m = 6k + 1,$$

et à

$$24 \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2$$

quand

$$m = 6k - 1.$$

Ainsi, par exemple,

$$N(2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2) = 30.$$

ce qui s'accorde avec les identités

$$2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0.0 + 2.0^2,$$

$$2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0.0 + 2(\pm 1)^2,$$

$$2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 1)(\mp 1) + 2(\mp 1)^2,$$

et

$$2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2\,0\,0 + 2.0^2.$$

Cette dernière identité, où l'on doit affecter du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et opérer les permutations convenables, fournit vingt-quatre représentations de l'entier 2 par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2.$$

Les autres, dans la troisième desquelles les signes supérieurs et inférieurs se correspondent, en fournissent six. Or

$$6 + 24 = 30.$$

4. On peut désirer une expression de

$$N\left(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2\right)$$

qui soit absolument générale, c'est-à-dire qui reste exacte même pour $\alpha = 0$. Celle que nous venons de communiquer (au n° 5) ne jouit pas de cette propriété. Quand on y fait $\alpha = 0$, elle donne une valeur triple de la véritable. Pour remédier à cet inconvénient, il aurait suffi de la diviser par le facteur

$$2 - (-1)^{2\alpha}$$

qui est égal à 1 pour $\alpha > 0$, mais égal à 3 pour $\alpha = 0$. Nous avons pensé qu'il valait mieux distinguer et traiter séparément le cas des entiers impairs et le cas des entiers pairs. Ceux qui voudront, au contraire, les réunir dans une même formule le feront, comme on voit, bien facilement.

SUR LA FORME

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2);$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande une expression simple du nombre des représentations d'un entier donné n (ou $2^\alpha 3^\beta m$, m impair et premier à 3) par la forme à six variables

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

c'est-à-dire du nombre

$$N\left[2^\alpha 3^\beta m = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

des solutions de l'équation

$$2^\alpha 3^\beta m = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

où x, y, z, t, u, v sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Pour répondre à cette question, on démontre d'abord (ce qui est très-facile) que l'équation proposée est impossible quand l'entier donné est de la forme

$$3g + 1.$$

En d'autres termes, on a toujours

$$N[3g + 1 = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 0.$$

Le cas d'un entier multiple de 3 est aisé aussi à traiter; car on prouve sans peine que la valeur de

$$N[3n = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

est égale à celle de

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2),$$

laquelle a été donnée dans l'article précédent.

Reste le cas plus difficile d'un entier donné $3g + 2$, c'est-à-dire $\equiv -1 \pmod{3}$. Cependant, je parviens alors à montrer que la valeur de

$$N[3g + 2 = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

est précisément égale au cinquième de celle de

$$N(3g + 2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2u^2 + 2uv + 2v^2),$$

qui a été donnée aussi dans l'article précédent. Les cas divers qui peuvent se présenter sont ainsi tous résolus.

2. Passons aux formules explicites, en distinguant le cas d'un entier impair et celui d'un entier pair.

On trouve d'abord, en supposant $\beta > 0$, la valeur de

$$N[3^\beta m = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

égale à

$$\left[9^\beta - \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

le signe sommatoire portant, comme dans l'article précédent dont nous conservons toutes les notations, sur les facteurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$.

Il est remarquable que ce résultat reste exact quand on fait $\beta = 0$. En d'autres termes, la valeur de

$$N[m = 2x + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

est égale à

$$\left[1 - \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

savoir : égale à zéro quand $m = 6k + 1$, mais égale à

$$2\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2$$

quand $m = 6k - 1$.

5. Pour $\alpha > 0$, et quel que soit β, la valeur de

$$\mathrm{N}\left[2^\alpha 3^\beta m = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

est

$$\frac{3}{5}\left[9^\beta - (-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{2\alpha+1} + (-1)^\alpha.3\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2.$$

Ainsi, en particulier, sous la condition de $\alpha > 0$,

$$\mathrm{N}\left[2^\alpha m = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

s'exprime par

$$\frac{3}{5}\left[1 - (-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{2\alpha+1} + (-1)^\alpha.3\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2.$$

quantité égale à zéro quand

$$(-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right) = 1,$$

c'est-à-dire quand

$$2^\alpha m = 3g + 1,$$

mais égale à

$$\frac{6}{5}\left[2^{2\alpha+1} + (-1)^\alpha.3\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2,$$

quand

$$2^\alpha m = 3g + 2,$$

vu qu'alors

$$1 - (-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right) = 2.$$

4. Nous nous contenterons de deux exemples tirés des entiers 2 et 5.

Nos formules indiquent pour eux respectivement six et quarante-

huit représentations par la forme

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2).$$

Or l'équation

$$2 = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

a effectivement six solutions qu'on obtient en prenant

$$z = 0, \quad t = 0, \quad u = 0, \quad v = 0,$$

avec

$$x = \pm 1, \quad y = 0,$$

ou bien avec

$$x = 0, \quad y = \pm 1,$$

ou encore avec

$$x = 1, \quad y = -1,$$

ou enfin avec

$$x = -1, \quad y = 1.$$

A son tour l'équation

$$5 = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

offre quarante-huit solutions. Les valeurs de x, y à employer sont les mêmes que ci-dessus; mais il ne faut cette fois égaler à zéro que trois des indéterminées z, t, u, v, la quatrième devant être égalée à ± 1.

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n, on demande une expression simple du nombre des représentations de n par la forme à six variables

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2,$$

c'est-à-dire du nombre

$$\mathrm{N}\,(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2,$$

où x, y, z, t, u, v sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

La réponse à cette question deviendra facile au moyen d'une relation que j'ai obtenue pour rattacher la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2,$$

dont nous voulons nous occuper ici, aux deux formes

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2$$

et

$$x^2 + 3\,(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

auxquelles j'ai consacré les deux premiers articles du présent cahier.

Je suis parvenu, en effet, à démontrer que la quantité

$$40\,\mathrm{N}\,(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2),$$

égale à quarante fois le nombre que nous cherchons, équivaut à la somme

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}(3n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2) \\ &+ 39\,\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)], \end{aligned}$$

dont les deux termes sont connus d'après ce qui a été dit dans les articles cités.

2. Pour arriver à des résultats explicites, reprenons les notations introduites au lieu indiqué, et posons à notre ordinaire

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m désignant un entier impair, premier à 3. La valeur de

$$\mathrm{N}(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2)$$

a été donnée dans l'article qui ouvre ce cahier, où elle est représentée abréviativement par

$$\mathrm{N}(2^\alpha 3^\beta m).$$

La valeur de

$$\mathrm{N}(3n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2),$$

c'est-à-dire de

$$\mathrm{N}(2^\alpha 3^{\beta+1} m),$$

s'en déduira en changeant β en $\beta + 1$. Quant à la valeur de

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)],$$

elle est, comme on l'a vu, égale à celle de

$$\mathrm{N}(2^\alpha 3^{\beta-1} m)$$

quand on a $\beta > 0$; de plus, l'expression analytique ainsi obtenue dans l'hypothèse de $\beta = 0$ jouit de la propriété singulière de rester exacte

pour $\beta = 0$, et de fournir encore la valeur de

$$N\left[2^{\alpha} m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right].$$

Cela étant, si nous distinguons le cas d'un entier impair et le cas d'un entier pair, nous serons conduits aux conclusions suivantes.

En commençant par un entier impair

$$3^{\beta} m,$$

je trouve que

$$N(3^{\beta} m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2)$$

s'exprime par

$$\left[3^{2\beta+1} + \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

le signe sommatoire portant comme d'ordinaire sur les diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$. En particulier, la valeur de

$$N(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2)$$

est

$$\left[3 + \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

Par exemple,

$$N(1 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2) = 4,$$

chose aisée à vérifier. Vient ensuite

$$N(3 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2).$$

Or l'équation

$$3 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2$$

jouit en effet de vingt-huit solutions, dont quatre répondent à des valeurs nulles de x, y, z, t, avec une des indéterminées u, v, égale à zéro, l'autre égale à ± 1; les vingt-quatre autres répondent à $u = 0$, $v = 0$, une des indéterminées x, y étant nulle, l'autre égale à ± 1,

et z, t prenant les valeurs suivantes :

$$z = \pm 1, \quad t = 0,$$

ou bien

$$z = 0, \quad t = \pm 1,$$

ou encore

$$z = 1, \quad t = -1,$$

ou enfin

$$z = -1, \quad t = 1.$$

Soit maintenant $\alpha > 0$. Je trouve que

$$N(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2)$$

s'exprime alors par

$$\frac{1}{5}\left[3^{2\beta+1} + (-1)^\alpha \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[4^{\alpha+1} - (-1)^\alpha \cdot 9\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2.$$

En prenant $\beta = 0$, on a la valeur de

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2),$$

savoir :

$$\frac{1}{5}\left[3 + (-1)^\alpha \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[4^{\alpha+1} - (-1)^\alpha \cdot 9\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

mais toujours sous la condition de $\alpha > 0$. Soit $\alpha = 1$, par exemple, en sorte qu'on demande la valeur de

$$N(2m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2).$$

Elle est fournie par l'expression

$$5\left[3 - \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2,$$

ce qui donne en particulier

$$N(2 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2) = 10;$$

or, l'équation

$$2 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2$$

offre effectivement dix solutions. Dans toutes, on a

$$u = 0, \quad v = 0;$$

mais dans six d'entre elles on a de plus

$$x = 0, \quad y = 0,$$

avec

$$z = \pm 1, \quad t = 0,$$

ou bien avec

$$z = 0, \quad t = \pm 1,$$

ou encore avec

$$z = 1, \quad t = -1,$$

ou enfin avec

$$z = -1, \quad t = 1,$$

tandis que dans les quatre autres on fait

$$z = 0, \quad t = 0$$

et

$$x = \pm 1, \quad y = \pm 1.$$

3. L'égalité que nous avons reconnue entre la valeur de

$$40\,\mathrm{N}\,(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2)$$

et la somme

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}(3n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2) \\ &+ 39\,\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] \end{aligned}$$

paraît fort remarquable; mais ce n'est pas la seule qu'on puisse employer pour arriver à l'expression générale de

$$\mathrm{N}\,(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2).$$

Ainsi on peut démontrer *à priori* que la valeur de

$$4\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2)$$

équivaut à celle de la somme ci-après :

$$\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2)$$
$$+ 3\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)].$$

En joignant cette équation à la précédente, on déterminerait à la fois

$$\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2)$$

et

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

au moyen des quantités connues

$$\mathrm{N}(n), \quad \mathrm{N}(3n),$$

qui toutes deux se rapportent à la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2$$

égalée à n ou à $3n$. La valeur de

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

a été déjà donnée ailleurs. Ajoutons celle de

$$\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2 + 3u^2 + 3v^2),$$

savoir :

$$\frac{1}{12}[13\mathrm{N}(n) - \mathrm{N}(3n)].$$

SUR UNE

GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE DE TAYLOR;

PAR M. ÉDOUARD ROCHE.

1. La formule de Taylor peut être considérée comme un cas particulier de la formule suivante, que je vais établir,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)-\ldots-\dfrac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)-h\varphi'(a)-\ldots-\dfrac{h^q}{1.2\ldots q}\varphi^q(a)}\\ &\qquad=\frac{1.2\ldots q}{1.2\ldots n}(h-\theta h)^{n-q}\frac{f^{n+1}(a+\theta h)}{\varphi^{q+1}(a+\theta h)},\end{aligned}\right.$$

où n et q sont entiers et positifs, et θ un nombre inconnu compris entre 0 et 1.

Désignons par S le premier membre; c'est une fonction de a, h, n, q qu'il faut déterminer par la condition

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} 0=&f(a+h)-f(a)-hf'(a)-\ldots-\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(a)\\ &-S\left[\varphi(a+h)-\varphi(a)-h\varphi'(a)-\ldots-\frac{h^q}{1.2\ldots q}\varphi^q(a)\right].\end{aligned}\right.$$

Soit la fonction auxiliaire

$$\begin{aligned} F(x)=&f(a+h)-f(x)-(a+h-x)f'(x)-\ldots-\frac{(a+h-x)^n}{1.2\ldots n}f^n(x)\\ &-S\left[\varphi(a+h)-\varphi(x)-(a+h-x)\varphi'(x)-\ldots-\frac{(a+h-x)^q}{1.2\ldots q}\varphi^q(x)\right],\end{aligned}$$

dont la dérivée par rapport à la variable x est

$$(3)\qquad F'(x)=-\frac{(a+h-x)^n}{1.2\ldots n}f^{n+1}(x)+S\frac{(a+h-x)^q}{1.2\ldots q}\varphi^{q+1}(x).$$

$F(x)$ et $F'(x)$ seront des fonctions continues entre a et $a+h$, si l'on admet qu'il en soit ainsi des fonctions

$$f(x),\ f'(x),\ldots,\ f^{n+1}(x),\qquad \varphi(x),\ \varphi'(x),\ldots,\ \varphi^{q+1}(x).$$

Il suit de là que $F(a+h)=0$, et aussi $F(a)=0$, en vertu de la condition (2). Donc $F'(x)$ doit s'annuler au moins une fois entre a et $a+h$, c'est-à-dire que $F'(a+\theta h)=0$ pour une certaine valeur de θ comprise entre 0 et 1. De là résulte, par l'équation (3),

$$0=-\frac{h^n(1-\theta)^n}{1.2\ldots n}f^{n+1}(a+\theta h)+S\frac{h^q(1-\theta)^q}{1.2\ldots q}\varphi^{q+1}(a+\theta h);$$

et enfin

$$S=\frac{1.2\ldots q}{1.2\ldots n}h^{n-q}(1-\theta)^{n-q}\frac{f^{n+1}(a+\theta h)}{\varphi^{q+1}(a+\theta h)}.$$

Telle est l'expression du rapport cherché, ce qui démontre la formule (1).

Le raisonnement serait en défaut si $f^{n+1}(x)$ et $\varphi^{q+1}(x)$ s'annulaient pour une même valeur de x comprise entre a et $a+h$: car alors l'équation (3) montre que, dans cet intervalle, la dérivée $F'(x)$ pourrait être nulle sans que S fût déterminé, c'est-à-dire sans qu'il fût nécessaire de donner à S la valeur précédente. Pour éviter cet inconvénient, sans ôter à la fonction $f(x)$ sa généralité, nous assujettirons la fonction $\varphi(x)$ à la condition que sa dérivée $\varphi^{q+1}(x)$ ne s'annule pas de a à $a+h$. Cette convention faite, la formule (1) sera toujours vraie, quand même $f^{n+1}(x)$ viendrait à s'annuler.

2. La formule (1), lorsqu'on suppose nuls à la fois les nombres n et q, se réduit au théorème de Cauchy sur le rapport des accroissements finis de deux fonctions,

$$(4)\qquad \frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)},$$

pourvu qu'on ait soin de remplacer par l'unité les produits $1.2\ldots n$, $1.2\ldots q$. A l'inverse, on peut de ce théorème remonter à notre formule générale. Il suffit pour cela d'appliquer l'équation (4) aux deux fonc-

tions suivantes

$$f(a+h)-f(x)-(a+h-x)f'(x)-\ldots-\frac{(a+h-x)^n}{1.2\ldots n}f^n(x),$$

$$\varphi(a+h)-\varphi(x)-(a+h-x)\varphi'(x)-\ldots-\frac{(a+h-x)^q}{1.2\ldots q}\varphi^q(x),$$

$f(x)$ et $\varphi(x)$ satisfaisant aux diverses conditions dont nous avons parlé plus haut. On retrouve ainsi immédiatement la formule (1).

5. Voici une autre marche basée sur la démonstration de la formule de Taylor à l'aide de l'intégration par parties. On a

$$f(a+h)-f(a)=\int_0^h f'(a+h-x)\,dx.$$

Or l'intégrale indéfinie

$$\int f'(a+h-x)\,dx$$

se transforme en

$$xf'(a+h-x)+\frac{x^2}{1.2}f''(a+h-x)+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^n(a+h-x)$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots n}\int x^n f^{n+1}(a+h-x)\,dx.$$

Prenons les intégrales entre les limites o et h, ce qui suppose la continuité des diverses fonctions dans cet intervalle ; il vient

$$hf'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(a)$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^h x^n f^{n+1}(a+h-x)\,dx.$$

Le dernier terme est une forme particulière du reste de $f(a+h)$ développé jusqu'au terme en h^n, et l'on peut écrire

$$(5)\qquad f(a+h)-f(a)-hf'(a)-\ldots-\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(a)=R_n,$$

et

$$(6)\qquad R_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^h x^n f^{n+1}(a+h-x)\,dx.$$

Soit maintenant $\varphi(x)$ une fonction arbitraire de x, satisfaisant aux mêmes conditions de continuité, et de plus telle que $\varphi^{q+1}(x)$ ne s'annule pas de a à $a+h$. On a identiquement

$$(7)\quad R_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^h x^{n-q}\frac{f^{n+1}(a+h-x)}{\varphi^{q+1}(a+h-x)}\cdot x^q\varphi^{q+1}(a+h-x)\,dx.$$

Considérons le premier facteur de l'intégrale. Nous le ferons sortir hors du signe, en lui attribuant une valeur moyenne entre les diverses valeurs qu'il prend quand x varie de o à h. Et comme, d'après les hypothèses, c'est une fonction continue, cette valeur moyenne répond à une valeur de x comprise entre o et h, que nous appellerons $h(1-\theta)$, θ étant lui-même compris entre o et 1. On a donc

$$(8)\quad R_n = \frac{1}{1.2\ldots n}(h-\theta h)^{n-q}\frac{f^{n+1}(a+\theta h)}{\varphi^{q+1}(a+\theta h)}\int_0^h x^q\varphi^{q+1}(a+h-x)\,dx.$$

Mais si l'on développe la fonction φ par les formules (5) et (6), on a, en s'arrêtant au terme en h^q,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(a+h)-\varphi(a)-h\varphi'(a)-\frac{h^2}{1.2}\varphi''(a)-\ldots-\frac{h^q}{1.2\ldots q}\varphi^q(a)\\ &\qquad = \frac{1}{1.2\ldots q}\int_0^h x^q\varphi^{q+1}(a+h-x)\,dx.\end{aligned}\right.$$

Éliminant l'intégrale entre cette équation et la précédente,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} R_n = &\frac{1.2\ldots q}{1.2\ldots n}(h-\theta h)^{n-q}\frac{f^{n+1}(a+\theta h)}{\varphi^{q+1}(a+\theta h)}\\ &\times\left[\varphi(a+h)-\varphi(a)-h\varphi'(a)-\ldots-\frac{h^q}{1.2\ldots q}\varphi^q(a)\right].\end{aligned}\right.$$

On peut considérer cette formule comme donnant une expression

générale du terme complémentaire de la série de Taylor. D'ailleurs, si l'on substitue R_n dans l'équation (5), on retrouve notre formule (1).

4. Nous avons admis que la fonction $\varphi^{q+1}(x)$ ne s'annulait pas de a à $a+h$, et par suite que $\varphi^{q+1}(a+h-x)$ ne changeait pas de signe de $x=0$ à $x=h$; alors tous les éléments $x^q\varphi^{q+1}(a+h-x)\,dx$ de l'intégrale (8) sont de même signe. Cela est nécessaire pour que, en multipliant chacun d'eux par le facteur constant

$$(h-\theta h)^{n-q}\frac{f^{n+1}(a+\theta h)}{\varphi^{q+1}(a+\theta h)},$$

on soit sûr d'obtenir un résultat équivalent à l'intégrale (7). Si cette condition n'était pas remplie, rien ne prouve que le facteur qu'on veut mettre en dehors du signe de l'intégration aurait une valeur intermédiaire entre la valeur minima et la valeur maxima qu'il acquiert de $x=0$ à $x=h$.

5. L'expression (10) de R_n contient les formes ordinaires du reste de la série de Taylor et peut en fournir une infinité d'autres. Car en prenant pour $\varphi(x)$ telle fonction qu'on voudra (satisfaisant aux conditions énoncées) et en donnant au nombre indéterminé q des valeurs particulières, on aura tout autant de formes du terme complémentaire.

Comme application, prenons d'abord

$$\varphi(x)=(x-a)^{p+1},$$

$p+1$ désignant un nombre positif; on aura

$$\varphi^q(x)=(p+1)p\ldots(p-q+2)(x-a)^{p-q+1};$$

d'où il résulte

$$\varphi(a+h)=h^{p+1}\quad\text{et}\quad\varphi^q(a)=0,$$

tant que q reste au-dessous du nombre positif $p+1$. De là

$$(11)\qquad R_n=\frac{1.2\ldots q}{1.2\ldots n}\frac{(1-\theta)^{n-q}}{\theta^{p-q}}\frac{h^{n+1}}{(p+1)\ldots(p-q+1)}f^{n+1}(a+\theta h).$$

Les deux nombres p et q sont ici indéterminés, mais q doit être entier et inférieur à $p+1$.

Faisons $q=0$ dans la formule (10), et en même temps

$$\varphi(x)=f^n(x), \quad \varphi'(x)=f^{n+1}(x).$$

Cela est permis, d'après une remarque précédente, pourvu que $f^{n+1}(x)$ ne s'annule pour aucune valeur de x comprise entre a et $a+h$. Par la substitution, $f^{n+1}(a+\theta h)$ disparaît, et l'on a

$$(12) \qquad R_n=\frac{h^n(1-\theta)^n}{1.2\ldots n}\left[f^n(a+h)-f^n(a)\right],$$

de sorte que le reste est alors moindre en valeur absolue que

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n}\left[f^n(a+h)-f^n(a)\right].$$

6. Enfin l'expression générale (10) se réduit, quand on y suppose nul le nombre indéterminé q, à

$$(13) \qquad R_n=\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{\varphi'(a+\theta h)}\,\frac{h^n(1-\theta)^n}{1.2\ldots n}\,f^{n+1}(a+\theta h);$$

c'est la formule de M. Schlömilch. Si l'on y détermine la fonction arbitraire par la condition

$$\varphi(x)=(a+h-x)^{p+1},$$

$p+1$ étant un nombre quelconque positif, on trouve

$$(14) \qquad R_n=\frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p}}{1.2\ldots n(p+1)}\,f^{n+1}(a+\theta h).$$

Cette expression du reste, que j'ai donnée dans ce journal (cahier de juillet 1858, p. 271), contient comme cas particuliers les deux formes usuelles. La forme de Lagrange s'obtient en y faisant $p=n$, et pour $p=0$ on retrouve celle de Cauchy.

NOUVEAU THÉORÈME

CONCERNANT

LE QUADRUPLE D'UN NOMBRE PREMIER DE L'UNE OU DE L'AUTRE DES DEUX FORMES $20k+3$, $20k+7$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Voici au sujet du quadruple d'un nombre premier m, de l'une ou de l'autre des deux formes

$$20k+3, \quad 20k+7,$$

un théorème nouveau que l'on pourra joindre à ceux que nous avons donnés dans le cahier de mars 1863.

Théorème. — « Pour tout nombre premier m de l'une ou de l'autre » des deux formes $20k+3$, $20k+7$, on peut poser au moins une » fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$4m = 5x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

» x, y étant des entiers impairs (positifs) et p un nombre premier qui » ne divise pas y. »

On admet pour l la valeur zéro. Quant au nombre premier p, nous ne lui imposons à priori aucune condition; mais, d'après l'équation même que je viens d'écrire, il doit être à la fois $\equiv 7 \pmod{8}$ et non résidu quadratique de 5. Il ne pourra donc appartenir qu'à l'une des deux formes $40\mu+7$, $40\mu+23$.

Les plus petits nombres premiers fournis par les deux expressions

$$20k+3, \quad 20k+7$$

sont

$$3,\ 7,\ 23,\ 43,\ 47.$$

Voyons comment notre théorème se vérifie pour eux.

Soit d'abord $m = 3$, d'où $4m = 12$. On a l'équation canonique

$$12 = 5.1^2 + 7.1^2.$$

Pour $m = 7$, c'est-à-dire pour $4m = 28$, on en a une également :

$$28 = 5.1^2 + 23.1^2.$$

Même résultat pour $m = 23$, d'où $4m = 92$. L'équation canonique qu'on obtient alors est

$$92 = 5.3^2 + 47.1^2.$$

Pour $m = 43$, d'où $4m = 172$, on a trois équations canoniques :

$$172 = 5.1^2 + 167.1^2,$$
$$172 = 5.3^2 + 127.1^2,$$
$$172 = 5.5^2 + 47.1^2.$$

Mais pour $m = 47$, d'où $4m = 188$, on n'en a plus qu'une :

$$188 = 5.5^2 + 7.3^2.$$

Le nombre des équations canoniques étant toujours impair, notre théorème est vérifié.

THÉORÈMES

CONCERNANT

L'OCTUPLE D'UN NOMBRE PREMIER DE L'UNE OU DE L'AUTRE DES DEUX FORMES $20k+3$, $20k+7$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Dans l'article précédent, comme déjà dans un article inséré au cahier de mars 1863, nous nous sommes occupés du quadruple des nombres premiers m qui appartiennent à l'une ou à l'autre des deux formes linéaires

$$20k+3, \quad 20k+7$$

et dont la propriété commune est d'être $\equiv 3 \pmod{4}$ et non résidus quadratiques de 5. Il s'agira ici de leur octuple $8m$.

THÉORÈME I. — « Pour tout nombre premier m, de l'une ou de » l'autre des deux formes $20k+3$, $20k+7$, on peut poser au » moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$8m = 5x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

» x et y étant des entiers impairs positifs, et p un nombre premier » qui ne divise pas y. »

En d'autres termes, si de l'octuple $8m$ d'un nombre premier m provenant de l'une des deux expressions $20k+3$ ou $20k+7$, on retranche, tant que faire se peut, les termes de la suite

$$5.1^2,\ 5.3^2,\ 5.5^2,\ 5.7^2,\ 5.9^2,\ \text{etc.},$$

savoir,

$$5,\quad 45,\quad 125,\quad 245,\quad 405,\ \text{etc.},$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la

forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p désignant un nombre premier non diviseur de y.

On admet pour l la valeur zéro. Quant au nombre premier p, nous ne lui imposons aucune condition; mais comme x et y sont impairs, l'équation

$$8m = 5x^2 + p^{4l+1}y^2$$

entraînera nécessairement la congruence

$$p \equiv 3 \pmod{8}.$$

D'un autre côté, m étant non résidu quadratique de 5, $8m$ est résidu, et par suite p aussi sera résidu. Le nombre premier p ne peut donc être que de l'une des deux formes

$$40g + 11, \quad 40g + 19.$$

2. Les plus petits nombres premiers fournis par les expressions

$$20k + 3, \quad 20k + 7$$

sont

$$3,\ 7,\ 23,\ 43,\ 47,\ \text{etc.}$$

Voyons comment notre théorème se vérifie pour eux.

Soit d'abord $m = 3$, d'où $8m = 24$. On a l'équation canonique

$$24 = 5.1^2 + 19.1^2.$$

Pour $m = 7$, on n'a également qu'une seule équation canonique

$$56 = 5.3^2 + 11.1^2,$$

car le reste 51, obtenu en retranchant 5 de 56, est le produit de 3 par 17 et n'a pas la forme voulue.

Mais pour $m = 23$, c'est-à-dire pour $8m = 184$, il y a trois équa-

tions canoniques, savoir

$$184 = 5.1^2 + 179.1^2,$$
$$184 = 5.3^2 + 139.1^2,$$
$$184 = 5.5^2 + 59.1^2.$$

Pour $m = 43$ (d'où $8m = 344$), on ne trouve plus qu'une équation canonique :

$$344 = 5.7^2 + 11.3^2.$$

Les restes

$$339,\ 299,\ 219,$$

que l'on obtient en retranchant de 344 les entiers 5, 45, 125 sont égaux respectivement à

$$3.113,\ 13.23,\ 3.73;$$

ils n'ont donc pas la forme demandée.

Enfin, pour $m = 47$ (d'où $8m = 376$), on retrouve trois équations canoniques. L'équation

$$376 = 5.1^2 + 371 = 5.1^2 + 7.53$$

n'est pas de ce genre. Mais on a celles-ci :

$$376 = 5.3^2 + 331.1^2,$$
$$376 = 5.5^2 + 251.1^2,$$
$$376 = 5.7^2 + 131.1^2,$$

où

$$331,\ 251,\ 131$$

sont des nombres premiers. On voit donc que partout notre théorème est vérifié.

5. L'analyse qui m'a conduit à ce premier théorème en donne un second tout aussi simple.

Théorème II. — « Pour tout nombre premier m de l'une ou de » l'autre des deux formes $20k+3$, $20k+7$, on peut poser au moins » une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$8m = x^2 + 5.p^{4l+1}y^2,$$

» x et y étant des entiers impairs et p un nombre premier qui ne » divise pas y. »

On admet pour l la valeur zéro. Quant au nombre premier p, nous ne lui imposons aucune condition. Mais puisque x et y sont impairs, l'équation

$$8m = x^2 + 5.p^{4l+1}y^2$$

entraînera nécessairement la congruence

$$5p \equiv -1 \pmod{8}$$

d'où

$$p \equiv 3 \pmod{8}.$$

Ainsi p ne peut être que de la forme $8\mu + 3$.

Nous avons compris dans un énoncé commun les nombres premiers m des deux formes $20k+3$, $20k+7$; mais pour faciliter les vérifications numériques qu'on voudra entreprendre au sujet du théorème II, il est bon de considérer séparément le cas de

$$m = 20k + 3$$

et celui de

$$m = 20k + 7.$$

C'est ce que nous allons faire.

4. Soit d'abord

$$m = 20k + 3.$$

On aura alors

$$8m \equiv -1 \pmod{5}.$$

Pour que

$$8m - x^2$$

soit divisible par 5, il faudra donc que l'entier impair et positif x soit de la forme

$$10l + 3$$

ou de la forme

$$10l + 7.$$

Les valeurs de x convenables ne peuvent donc être fournies que par la suite

$$3,\ 7,\ 13,\ 17,\ 23,\ \text{etc.}$$

Les carrés x^2 sont dès lors fournis par celle-ci :

$$9,\ 49,\ 169,\ 289,\ 529,\ \text{etc.}$$

Quand il s'agit d'un nombre premier m de la forme $20k + 3$, notre théorème II consiste donc en ce que si du produit $8m$ on retranche, tant que faire se peut, les termes de la suite

$$9,\ 49,\ 169,\ 289,\ 529,\ \text{etc.}$$

on trouvera un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1} y^2,$$

p désignant un nombre premier $(8\mu + 3)$ qui ne divise pas y.

Par cet énoncé, on abrége la recherche des équations canoniques propres à chaque valeur donnée de m.

Pour $m = 3$ (d'où $8m = 24$), on a immédiatement l'équation canonique

$$24 = 3^2 + 5.3.1^2.$$

Pour $m = 23$ (c'est-à-dire pour $8m = 184$), on a trois restes à examiner, savoir

$$175,\ 135,\ 15.$$

Le dernier conduit à l'équation canonique

$$184 = 13^2 + 5.3.1^2.$$

Les deux autres doivent être rejetés; car, divisés par 5, ils donnent

respectivement le quotient $35 = 5.7$, qui n'a pas la forme voulue $p^{4l+1}y^2$, et le quotient $27 = 3^3$ qui ne l'a pas davantage, l'exposant 3 n'étant pas de la forme $4l + 1$.

Pour $m = 43$ (d'où $8m = 344$), notre théorème est également vérifié. Le nombre des équations canoniques s'élève alors à trois. Les voici :

$$344 = 3^2 + 5.67\ 1^2,$$
$$344 = 7^2 + 5.59.1^2,$$
$$344 = 17^2 + 5.11.1^2.$$

5. Passons aux nombres premiers m de la forme

$$20k + 7.$$

Pour qu'avec un tel nombre, la différence

$$8m - x^2$$

soit divisible par 5, il faut que l'entier impair et positif x soit de la forme

$$10l + 1$$

ou de la forme

$$10l + 9.$$

Les valeurs de x convenables ne peuvent donc être fournies que par la suite

$$1,\ 9,\ 11,\ 19,\ 21,\ \text{etc.}$$

Les carrés x^2 sont dès lors fournis par celle-ci :

$$1,\ 81,\ 121,\ 361,\ 441,\ \text{etc.}$$

Quand il s'agit d'un nombre premier m de la forme $20k + 7$, notre théorème II consiste donc en ce que si du produit $8m$ on retranche, tant que faire se peut, les termes de la suite

$$1,\ 81,\ 121,\ 361,\ 441,\ \text{etc.},$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p désignant un nombre premier $(8\mu + 3)$ qui ne divise pas y.

Avec cet énoncé, on trouve aisément les équations canoniques propres aux diverses valeurs de m.

Pour $m = 7$ (d'où $8m = 56$), on a immédiatement l'équation canonique

$$56 = 1^2 + 5.11.1^2.$$

Notre théorème est donc vérifié.

Il l'est également pour $m = 47$ (c'est-à-dire pour $8m = 376$). On trouve alors trois équations canoniques. Des quatre restes obtenus en retranchant de 376 les entiers

$$1,\ 81,\ 121,\ 361,$$

le troisième seul doit être rejeté; il est égal à $255 = 5.51$ et 51 (produit de 17 par 3) n'est pas de la forme

$$p^{4l+1}y^2.$$

Les trois autres restes conduisent aux équations canoniques ci-apres :

$$376 = 1^2 + 5.\ 3.5^2,$$
$$376 = 9^2 + 5.59.1^2,$$
$$376 = 19^2 + 5.\ 3.1^2.$$

Enfin, soit $m = 67$, d'où $8m = 536$. Les nombres à retrancher de 536 sont

$$1,\ 81,\ 121,\ 361,\ 441.$$

Les restes sont respectivement

$$535,\ 445,\ 415,\ 175,\ 95.$$

En les divisant par 5, on obtient les quotients

$$107,\ 91,\ 83,\ 35,\ 19,$$

dont deux n'ont pas la forme voulue, puisque l'on a

$$91 = 7.13$$

et

$$35 = 7.5.$$

Mais les autres donnent lieu, conformément à notre théorème, à un nombre impair d'équations canoniques :

$$536 = 1^2 + 5.107.1^2,$$
$$536 = 11^2 + 5.\ 83.1^2,$$
$$536 = 21^2 + 5.\ 19.1^2.$$

Je ne pousserai pas plus loin ces calculs.

SUR

LES THÉORÈMES DE M. KRONECKER

RELATIFS AUX FORMES QUADRATIQUES;

PAR M. HERMITE.

(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 7 juillet 1862.)

La théorie des fonctions elliptiques présente deux points principaux où elle vient se lier à l'arithmétique, et spécialement à la théorie des formes quadratiques à deux indéterminées de déterminant négatif. L'un s'offre lorsqu'on développe en séries simples de sinus et de cosinus des quotients de fonctions Θ, et ne suppose que les considérations les plus élémentaires de la théorie; l'autre tient à l'étude beaucoup plus profonde et difficile de ces équations algébriques à coefficients entiers dont dépendent les modules qui donnent lieu à la multiplication complexe. Si différents et éloignés que soient ces deux points de vue, ils présentent néanmoins un ensemble de résultats communs: nous voulons parler des déterminations nouvelles du nombre des classes de même déterminant, découvertes par M. Kronecker, et qui à bien juste titre ont attiré l'attention des géomètres. Dans une Lettre communiquée par M. Liouville à l'Académie l'année dernière, j'ai rapidement indiqué de quelle manière ces résultats pouvaient s'établir par la considération élémentaire du développement en série de sinus et de cosinus. C'est sur cette méthode que je me propose de revenir pour en faire une étude plus complète, en mieux fixer le caractère et les limites, et surtout approfondir la nature des nouveaux éléments arithmétiques qu'elle met en jeu et qui lui semblent propres. Elle repose essentiellement sur l'emploi des expressions en séries de deux systèmes différents de fonctions qu'il est nécessaire de donner avant d'en exposer le principe.

1. Le premier de ces systèmes est, à quelques exceptions près, l'ensemble des fonctions doublement périodiques considérées par Jacobi dans le § 39 des *Fundamenta*. En écrivant, pour abréger, Θ, Θ_1, Π,

H_1 au lieu de $\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$, $\Theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$, $H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$, $H_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$, et θ, θ_1, η au lieu de $\Theta(0)$, $\Theta_1(0)$, $H_1(0)$, de sorte qu'on ait :

$$\theta = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - 2q^{25} + \ldots,$$

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + \ldots,$$

$$\eta = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}} = 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + 2\sqrt[4]{q^{49}} + \ldots,$$

je les présenterai groupées de la manière suivante :

1. $$\eta\theta_1\frac{H}{\Theta} = \frac{4\sqrt{q}\sin x}{1-q} + \frac{4\sqrt{q^3}\sin 3x}{1-q^3} + \frac{4\sqrt{q^5}\sin 5x}{1-q^5} + \ldots,$$

2. $$\eta\theta_1\frac{\Theta}{H} = \frac{1}{\sin x} + \frac{4q\sin x}{1-q} + \frac{4q^3\sin 3x}{1-q^3} + \frac{4q^5\sin 5x}{1-q^5} + \ldots,$$

3. $$\eta\theta_1\frac{H_1}{\Theta_1} = \frac{4\sqrt{q}\cos x}{1-q} - \frac{4\sqrt{q^3}\cos 3x}{1-q^3} + \frac{4\sqrt{q^5}\cos 5x}{1-q^5} - \ldots,$$

4. $$\eta\theta_1\frac{\Theta_1}{H_1} = \frac{1}{\cos x} + \frac{4q\cos x}{1-q} - \frac{4q^3\cos 3x}{1-q^3} + \frac{4q^5\cos 5x}{1-q^5} - \ldots;$$

---

5. $$\eta\theta\frac{H}{\Theta_1} = \frac{4\sqrt{q}\sin x}{1+q} - \frac{4\sqrt{q^3}\sin 3x}{1+q^3} + \frac{4\sqrt{q^5}\sin 5x}{1+q^5} - \ldots,$$

6. $$\eta\theta\frac{\Theta_1}{H} = \frac{1}{\sin x} - \frac{4q\sin x}{1+q} - \frac{4q^3\sin 3x}{1+q^3} - \frac{4q^5\sin 5x}{1+q^5} - \ldots,$$

7. $$\eta\theta\frac{H_1}{\Theta} = \frac{4\sqrt{q}\cos x}{1+q} + \frac{4\sqrt{q^3}\cos 3x}{1+q^3} + \frac{4\sqrt{q^5}\cos 5x}{1+q^5} + \ldots,$$

8. $$\eta\theta\frac{\Theta}{H_1} = \frac{1}{\cos x} - \frac{4q\cos x}{1+q} + \frac{4q^3\cos 3x}{1+q^3} - \frac{4q^5\cos 5x}{1+q^5} + \ldots;$$

---

9. $$\theta\theta_1\frac{\Theta_1}{\Theta} = 1 + \frac{4q\cos 2x}{1+q^2} + \frac{4q^2\cos 4x}{1+q^4} + \frac{4q^3\cos 6x}{1+q^6} + \ldots,$$

10. $$\theta\theta_1\frac{\Theta}{\Theta_1} = 1 - \frac{4q\cos 2x}{1+q^2} + \frac{4q^2\cos 4x}{1+q^4} - \frac{4q^3\cos 6x}{1+q^6} + \ldots,$$

11. $$\theta\theta_1\frac{H_1}{H} = \cot x - \frac{4q^2\sin 2x}{1+q^2} - \frac{4q^4\sin 4x}{1+q^4} - \frac{4q^6\sin 6x}{1+q^6} - \ldots,$$

12. $\theta\theta_1 \frac{H}{H_1} = \tang x - \frac{4q^2 \sin 2x}{1+q^2} + \frac{4q^4 \sin 4x}{1+q^4} - \frac{4q^6 \sin 6x}{1+q^6} \ldots;$

13. $\theta^2 \frac{\Theta_1 H_1}{\Theta H} = \cot x - \frac{4q \sin 2x}{1+q} - \frac{4q^2 \sin 4x}{1+q^2} - \frac{4q^3 \sin 6x}{1+q^3} - \ldots,$

14. $\theta^2 \frac{\Theta H}{\Theta_1 H_1} = \tang x - \frac{4q \sin 2x}{1+q} + \frac{4q^2 \sin 4x}{1+q^2} - \frac{4q^3 \sin 6x}{1+q^3} + \ldots;$

15. $\theta_1^2 \frac{\Theta H_1}{\Theta_1 H} = \cot x + \frac{4q \sin 2x}{1-q} - \frac{4q^2 \sin 4x}{1+q^2} + \frac{4q^3 \sin 6x}{1-q^3} - \ldots,$

16. $\theta_1^2 \frac{\Theta_1 H}{\Theta H_1} = \tang x + \frac{4q \sin 2x}{1-q} + \frac{4q^2 \sin 4x}{1+q^2} + \frac{4q^3 \sin 6x}{1-q^3} + \ldots.$

17. $\eta^2 \frac{HH_1}{\Theta\Theta_1} = \frac{8q \sin 2x}{1-q^2} + \frac{8q^3 \sin 6x}{1-q^6} + \frac{8q^5 \sin 10x}{1-q^{10}} + \ldots,$

18. $\eta^2 \frac{\Theta\Theta_1}{HH_1} = \frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{8q^2 \sin 2x}{1-q^2} + \frac{8q^6 \sin 6x}{1-q^6} + \frac{8q^{10} \sin 10x}{1-q^{10}} + \ldots.$

Je joindrai en outre à ces formules celles qui concernent la fonction seconde espèce, savoir :

19. $\theta_1^2 \frac{\Theta'}{\Theta} = \frac{4q \sin 2x}{1-q^2} + \frac{4q^2 \sin 4x}{1-q^4} + \frac{4q^3 \sin 6x}{1-q^6} + \ldots,$

20. $\theta_1^2 \frac{H'}{H} = \cot x + \frac{4q^2 \sin 2x}{1-q^2} + \frac{4q^4 \sin 4x}{1-q^4} + \frac{4q^6 \sin 6x}{1-q^6} + \ldots,$

21. $\theta_1^2 \frac{\Theta_1}{\Theta_1} = \frac{4q \sin 2x}{1-q^2} + \frac{4q^2 \sin 4x}{1-q^4} + \frac{4q^3 \sin 6x}{1-q^6} + \ldots,$

22. $\theta_1^2 \frac{H'_1}{H_1} = \tang x + \frac{4q^2 \sin 2x}{1-q^2} + \frac{4q^4 \sin 4x}{1-q^4} + \frac{4q^6 \sin 6x}{1-q^6} + \ldots.$

Le second système comprend le développement en série de quotients dont le dénominateur est l'une des fonctions Θ, le numérateur le produit de deux autres et qui par suite ne représentent plus de fonctions doublement périodiques. En supposant différents l'un de l'autre les facteurs du numérateur et posant, pour abréger,

$$\mathfrak{A}_n = q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2n-1)^2}{4}},$$
$$\mathfrak{B}_n = 1 + 2q^{-1} + 2q^{-4} - \ldots + 2q^{-(n-1)^2},$$
$$\mathfrak{C}_n = 1 - 2q^{-1} + + 2q^{-4} - \ldots + 2(-q)^{-(n-1)^2},$$

on a ce premier groupe de fonctions, savoir :

$$1.\quad \eta\frac{\mathrm{HH}_1}{\Theta}=\sum_{n=1}4\sin 2nx\,q^{n^2}\mathfrak{A}_n,$$

$$2.\quad \eta\frac{\mathrm{HH}_1}{\Theta_1}=\sum_{n=1}4\sin 2nx\,(-1)^{n-1}q^{n^2}\mathfrak{A}_n,$$

$$3.\quad \eta\frac{\Theta\Theta_1}{\mathrm{H}}=\frac{1}{\sin x}+\sum_{n=1}4\sin(2n+1)x\,q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\mathfrak{A}_n,$$

$$4.\quad \eta\frac{\Theta\Theta_1}{\mathrm{H}_1}=\frac{1}{\cos x}+\sum_{n=1}4\cos(2n+1)x\,(-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\mathfrak{A}_n,$$

$$5.\quad \theta_1\frac{\Theta_1\mathrm{H}}{\mathrm{H}_1}=\operatorname{tang}x+\sum_{n=1}2\sin 2nx\,(-1)^{n-1}q^{n^2}\mathfrak{B}_n,$$

$$6.\quad \theta_1\frac{\Theta\mathrm{H}_1}{\mathrm{H}}=\cot x+\sum_{n=1}2\sin 2nx\,q^{n^2}\mathfrak{B}_n,$$

$$7.\quad \theta_1\frac{\Theta_1\mathrm{H}}{\Theta}=\sum_{n=0}2\sin(2n+1)x\,q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\mathfrak{B}_{n+1},$$

$$8.\quad \theta_1\frac{\Theta\mathrm{H}_1}{\Theta_1}=\sum_{n=0}2\cos(2n+1)x\,(-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\mathfrak{B}_{n+1},$$

$$9.\quad \theta\frac{\Theta\mathrm{H}}{\mathrm{H}_1}=\operatorname{tang}x-\sum_{n=1}2\sin 2nx\,q^{n^2}\mathfrak{C}_n,$$

$$10.\quad \theta\frac{\Theta_1\mathrm{H}_1}{\mathrm{H}}=\cot x+\sum_{n=1}2\sin 2nx\,(-1)^n q^{n^2}\mathfrak{C}_n,$$

$$11.\quad \theta\frac{\Theta\mathrm{H}}{\Theta_1}=\sum_{n=0}2\sin(2n+1)x\,q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\mathfrak{C}_{n+1},$$

$$12.\quad \theta\frac{\Theta_1\mathrm{H}_1}{\Theta}=\sum_{n=0}2\cos(2n+1)x\,(-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\mathfrak{C}_{n+1}.$$

Si l'on suppose ensuite que les deux facteurs du numérateur soient égaux, on a un second groupe de douze fonctions où figurent les ex-

pressions suivantes. Posons

$$\begin{aligned} Z = {} & 4\cos 2x q\left(q^{-\frac{1}{4}}\right) \\ & - 4\cos 4x q^{4}\left(q^{-\frac{1}{4}} - q^{\frac{9}{4}}\right) \\ & + 4\cos 6x q^{9}\left(q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + q^{-\frac{25}{4}}\right) \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U = {} & \frac{1}{\sin x} - 4\sin 3x q^{\frac{9}{4}}\left(q^{-\frac{1}{4}}\right) \\ & + 4\sin 5x q^{\frac{25}{4}}\left(q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{4}{9}}\right) \\ & - 4\sin 7x q^{\frac{49}{4}}\left(q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + q^{-\frac{25}{4}}\right) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En désignant par Z_1 et U_1 ce que deviennent Z et U lorsqu'on met $\frac{\pi}{2} - x$, au lieu de x, on aura

13. $\eta\theta_1 \frac{H^2}{\Theta} = A\Theta - \theta Z,$

14. $\eta\theta_1 \frac{\Theta^2}{H} = AH + \theta U,$

15. $\eta\theta_1 \frac{H_1^2}{\Theta_1} = A\Theta_1 - \theta Z_1,$

16. $\eta\theta_1 \frac{\Theta_1^2}{H_1} = AH_1 + \theta U_1,$

17. $\eta\theta \frac{H^2}{\Theta_1} = B\Theta_1 + \theta_1 Z_1.$

18. $\eta\theta \frac{\Theta_1^2}{H} = -BH + \theta_1 U.$

19. $\eta\theta \frac{H_1^2}{\Theta} = B\Theta + \theta_1 Z.$

20. $\eta\theta \frac{\Theta^2}{H_1} = -BH_1 + \theta_1 U_1,$

21. $\theta\theta_1 \frac{\Theta_1^2}{\Theta} = C\Theta + \eta Z,$

22. $\theta\theta_1 \frac{H_1^2}{H} = -CH + \eta U.$

23. $\theta\theta_1 \frac{\Theta^2}{\Theta_1} = C\Theta_1 + \eta Z_1,$

24. $\theta\theta_1 \frac{H^2}{H_1} = -CH_1 + \eta U_1.$

Les quantités A, B, C sont des constantes, savoir :

$$A = \quad Z(0) = 4 \sum a_n q^{\frac{1}{4}n},$$

$$B = -Z_1(0) = 4 \sum (-1)^{\frac{n-3}{4}} a_n q^{\frac{1}{4}n},$$

$$C = \quad U_1(0) = 1 + 4 \sum (-1)^{\frac{m}{2}} c_m q^m.$$

Dans ces formules m est pair et $n \equiv 3 \bmod. 4$, les coefficients a_n, c_m désignant les fonctions numériques définies par ces égalités :

$$a_n = \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

$$c_m = \sum (-1)^{\frac{d'-1}{2}} - \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

où d représente tous les diviseurs impairs de n et de m inférieurs à leurs conjugués et d' les diviseurs impairs de m plus grands que leurs conjugués. On a d'ailleurs, en faisant $x = 0$ dans les équations **15**, **16**, **20**, ces relations dont nous ferons usage plus tard :

$$\begin{cases} \eta^3 = A\theta_1 - B\theta, \\ \theta_1^3 = A\eta + C\theta, \\ \theta^3 = B\eta + C\theta_1. \end{cases}$$

Voici maintenant de quelle manière les deux systèmes de fonctions conduisent à la considération des formes quadratiques à deux indéterminées de déterminant négatif.

II. Ayant, à cet effet, distingué quatre espèces de développements en série, suivant qu'ils se composent de termes en $\sin(2n+1)x$, $\cos(2n+1)x$, $\sin 2nx$, $\cos 2nx$, nous multiplierons entre elles toutes les fonctions du premier et du second système qui appartiennent à la même espèce, de manière que les produits obtenus ne comprennent que des termes en $\cos 2nx$. En intégrant ces produits entre les limites zéro et $\frac{\pi}{2}$ on donnera naissance à autant d'expressions fonctions de la

seule quantitité q, où le coefficient d'un terme quelconque q^{Δ} ou $q^{\frac{\Delta}{4}}$ dépendra d'une certaine manière du nombre des classes quadratiques de déterminant $-\Delta$. Tel est donc le procédé analytique très-simple qui, en établissant un lien entre les formes quadratiques de déterminant négatif et les transcendantes elliptiques, conduit à l'ensemble de résultats que nous allons passer en revue. Ces résultats d'ailleurs se classent naturellement d'après les intégrales définies de fonctions Θ, d'où ils sont tirés. Ainsi, en premier lieu, s'offrent les combinaisons obtenues en multipliant respectivement les équations **15**, **18**, **1**, **2**, **11** du premier système avec les équations **5**, **1**, **5**, **7**, **5** du second. et où l'intégration s'effectue d'elle-même, savoir :

$$(A)\quad \begin{cases} (\mathbf{15},\ \mathbf{5}) & \theta_1^3 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta\, dx = \frac{\pi}{2}\theta_1^3, \\ (\mathbf{18},\ \mathbf{1}) & \eta^3 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta_1\, dx = \frac{\pi}{2}\eta^3, \\ (\mathbf{1},\ \mathbf{5}) & \theta_1\eta^2 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta_1\, dx = \frac{\pi}{2}\theta_1\eta^2, \\ (\mathbf{2},\ \mathbf{7}) & \eta\theta_1^2 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta_1\, dx = \frac{\pi}{2}\eta\theta_1^2, \\ (\mathbf{11},\ \mathbf{5}) & \theta\theta_1^2 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta_1\, dx = \frac{\pi}{2}\theta\theta_1^2. \end{cases}$$

Celles-ci seront étudiées ensuite, savoir :

$$(B)\quad \begin{cases} (\mathbf{5},\ \mathbf{7}) \\ \text{et} \\ (\mathbf{12},\ \mathbf{1}) & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\theta\theta_1 \frac{\Pi^2}{\Theta}\, dx = \frac{\pi}{2} A\theta. \\ (\mathbf{16},\ \mathbf{2}) & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\theta_1^2 \frac{\Pi^2}{\Theta}\, dx = \frac{\pi}{2} A\theta_1. \end{cases}$$

$$\text{B) (suite)}\quad \begin{cases} (17,\ 5) & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta^2 \theta_1 \frac{H^2}{\Theta}\, dx = \frac{\pi}{2} A\eta. \\ (15,\ 5) & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 \theta_1 \frac{\Theta_1^2}{\Theta}\, dx = \frac{\pi}{2} C\theta. \\ (6,\ 7) & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\theta\theta_1 \frac{\Theta_1^2}{\Theta}\, dx = \frac{\pi}{2} C\eta. \end{cases}$$

Elles sont, comme on voit, essentiellement distinctes, et toutes les autres de forme analytique semblable qu'on pourrait obtenir reproduiraient, en changeant suivant les cas le signe de q, les mêmes fonctions.

III. Legendre, comme on sait, a le premier découvert par induction que le nombre des décompositions d'un entier en trois carrés dépendait d'une manière simple du nombre des classes quadratiques ayant pour déterminant ce même entier changé de signe, et Gauss a démontré ensuite ce résultat important dans ses *Recherches arithmétiques*. M. Kronecker a remarqué qu'on y est également amené par la théorie des fonctions elliptiques; mais la méthode du savant géomètre suppose, à son point de départ, et d'une manière essentielle, autant que j'en puis juger, la notion arithmétique de classe, qu'il n'est pas nécessaire d'employer dans la voie que j'ai suivie. Si l'on ne distingue pas les représentations propres et impropres, il suffira, en effet, de la définition seule du système des formes réduites pour un déterminant donné; de sorte que ce théorème, dans l'enchaînement naturel des propositions de l'arithmétique, pourra être placé dès le commencement et à côté des résultats qu'a obtenus Jacobi sur la décomposition en quatre carrés. Pour justifier cette observation, je présenterai en détail ce qui concerne la formation du cube de la fonction

$$\theta_1 = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots.$$

afin aussi de pouvoir me borner, à l'égard des autres quantités η^3.

$\theta_1 \eta^2, \ldots$, contenues dans les formules (A), à donner seulement les résultats.

Considérons, à cet effet, les séries 15 et 5 du premier et du second système, dont il faut effectuer le produit, savoir :

$$\theta_1^2 \frac{\Theta H_1}{\Theta_1 H} = \cot x + \frac{4q \sin 2x}{1-q} - \frac{4q^2 \sin 4x}{1+q^2} + \frac{4q^3 \sin 6x}{1-q^3} - \ldots$$
$$= \cot x + \sum (-1)^{n-1} \frac{4q^n \sin 2nx}{1+(-q)^n},$$

et en faisant comme précédemment

$$\mathfrak{B}_n = 1 + 2q^{-1} + 2q^{-4} + \ldots + 2q^{-(n-1)^2},$$
$$\theta_1 \frac{\Theta_1 H}{H_1} = \operatorname{tang} x + \sum (-1)^{n-1} 2q^{n^2} \mathfrak{B}_n \sin 2nx.$$

Ce produit devant être ensuite intégré entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$, nous ferons usage de ces formules, qu'il est aisé d'obtenir :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot x \sin 2nx\, dx = \frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tang} x \sin 2nx\, dx = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2}.$$

On trouvera de cette manière, après avoir supprimé le facteur $\frac{\pi}{2}$,

$$\theta_1^3 = 1 + 4 \sum_{n=1} \frac{q^n}{1+(-q)^n} - 2 \sum_{n=1} (-1)^n q^{n^2} \mathfrak{B}_n + 4 \sum_{n=1} \frac{q^{n^2+n} \mathfrak{B}_n}{1+(-q)^n}.$$

Les deux premières séries qui se présentent dans cette expression se développent sans difficulté suivant les puissances de q. En désignant par m un nombre impair quelconque, par $\varphi(m)$ le nombre de ses

diviseurs, on trouvera

$$\sum \frac{q^n}{1+(-q)^n} = \sum \varphi(m) q^m - \sum (\sigma - 3)\varphi(m) q^{2^\sigma m},$$

$$\sum (-1)^n q^{n^2} \mathfrak{B}_n = \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \varphi(m) q^m$$
$$+ \sum \varphi(m) q^{4m}$$
$$+ \sum (\sigma - 3)\varphi(m) q^{4 \cdot 2^\sigma m},$$

l'exposant σ prenant la série des valeurs, 1, 2, 3, etc.

Pour la troisième, en remplaçant d'abord $\frac{1}{1+(-q)^n}$ par le développement $\sum_{a=0} (-1)^{a(a+1)} q^{an}$, elle devient

$$\sum \frac{q^{n^2+n} \mathfrak{B}_n}{1+(-q)^n} = \sum (-1)^{a(n+1)} q^{n^2+n+an-b^2};$$

ce qui met en évidence dans l'exposant q le déterminant d'une forme quadratique (A, B, C), en posant

$$A = n, \quad B = b, \quad C = n + 1 + a.$$

Laissant de côté pour un instant le facteur $(-1)^{a(n+1)}$, dont nous nous occuperons plus tard, observons que b doit recevoir les valeurs

$$0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \ldots, \quad \pm (n-1);$$

de sorte que cette forme sera réduite, si l'on s'arrête à la limite $\pm\left(\frac{n}{2}\right)$, c'est-à-dire, pour plus de précision, $\pm\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ lorsque n sera pair, et $\pm\left(\frac{n-1}{2}\right)$ lorsque n sera impair. Ce premier groupe de valeurs, si l'on fait

$$n^2 + n + an - b^2 = \Delta,$$

donnera et une seule fois toutes les formes réduites de déterminant

$-\Delta$, en exceptant les formes ambiguës (A, B, C) où $2B = A$ et $C = A$, et parmi les formes (A, o, C), le seul cas de $A = C$, qui se présente quand Δ est un carré. Dans ces divers cas, en effet, on serait conduit pour le nombre a à une valeur négative.

Considérons ensuite la seconde série des valeurs de b, savoir :

$$\pm b = \frac{n}{2}, \quad \frac{n}{2} + 1, \ldots, \quad n - 1,$$

lorsque n est pair, et

$$\pm b = \frac{n+1}{2}, \quad \frac{n+1}{2} + 1, \ldots, \quad n - 1,$$

lorsque n est impair. Soit ε une quantité égale à l'unité en valeur absolue et de même signe que b; en faisant la substitution

$$x = \varepsilon X - Y, \quad y = \varepsilon Y$$

dans la forme

$$nx^2 + 2bxy + (n + 1 + a)y^2,$$

on trouvera

$$nX^2 - 2\varepsilon(n - b\varepsilon)XY + (2n - 2b\varepsilon + 1 + a)Y^2.$$

et cette transformée, que nous désignerons par $(A, -\varepsilon B, C)$, en posant

$$(1) \qquad A = n, \quad B = n - b\varepsilon, \quad C = 2n - 2b\varepsilon + 1 + a,$$

remplira les conditions : $2B < A$, $2B < C$, le premier terme A étant tantôt plus grand, tantôt plus petit que le dernier C. On voit donc maintenant se produire une série de formes en nombre double des formes réduites, si l'on excepte celles-ci : (A, o, C), qui ont été précédemment obtenues pour $b = o$. En effet, on tire des équations (1) :

$$(2) \qquad n = A, \quad b = \varepsilon(A - B), \quad a = C - 2B - 1,$$

et en permutant A et C,

$$(3) \qquad n = C, \quad b = \varepsilon(C - B), \quad a = A - 2B - 1.$$

Ainsi chaque forme réduite non ambiguë donne effectivement deux systèmes différents (n, b, a), où n et a sont positifs et b compris entre les limites assignées. Mais à l'égard des deux formes ambiguës $(A, \varepsilon B, A)$ les équations (2) et (3) coïncident, et pour celles-ci : $(2B, \varepsilon B, C)$, les équations (3) conduisant à une valeur négative de a, on n'a de même et pour chacune d'elles qu'un seul et unique système de nombres, n, b, a. Si l'on avait d'ailleurs à la fois :

$$2B = A = C,$$

on ne pourrait employer ni les équations (2), ni les équations (3), de sorte que cette forme est absolument exclue, comme plus haut le cas de $A = C$ dans le groupe des formes ambiguës $(A, 0, C)$. En résumé, soit, pour un déterminant donné Δ, H le nombre des formes réduites non ambiguës, h le nombre des formes ambiguës de l'espèce $(A, 0, C)$, h' le même nombre à l'égard des deux suivantes : $(2B, B, C)$, (A, B, A), l'expression

$$3H + h + 2h'$$

sera le nombre des systèmes (n, b, a) qui, sous les conditions requises, satisfont à l'équation

$$n^2 + n + an - b^2 = \Delta.$$

Mais si Δ est un carré ou le triple d'un carré, ce nombre, d'après les exceptions relatives aux formes dérivées de $(1, 0, 1)$ et $(2, 1, 2)$, devra être diminué d'une ou de deux unités. On peut d'ailleurs l'écrire de cette autre manière,

$$3\mathfrak{H} - 2h - h'.$$

en introduisant le nombre total des classes de déterminant $-\Delta$ qui est

$$\mathfrak{H} = H + h + h'.$$

Maintenant revenons au facteur $(-1)^{a(n+1)}$ qui joue dans la question un rôle essentiel. En posant en premier lieu

$$A = n, \quad B = b, \quad C = n + 1 + a,$$

et en second lieu

$$A = n, \quad B = n - b\varepsilon, \quad C = 2n - 2b\varepsilon + 1 + a,$$

et

$$C = n, \quad B = n - b\varepsilon, \quad A = 2n - 2b\varepsilon + 1 + a,$$

on trouve toujours la même valeur

$$a(n+1) \equiv \Delta + A + B + C + 1 \pmod{2}.$$

Il en résulte que pour tout déterminant le facteur $(-1)^{a(n+1)}$ sera égal à $+1$ si l'un au moins des termes extrêmes A et C est impair, et à -1 si tous deux sont pairs. En faisant cette distinction dans les formes réduites, nommons $\mathfrak{H}_0$ le nombre total de ces formes, h_0, h'_0 celui des formes ambiguës des deux espèces dont nous avons parlé, où l'un des termes extrêmes est impair, et $\mathfrak{H}_1$, h_1, h'_1, les expressions de même signification dans le cas où les deux termes extrêmes sont pairs : on aura évidemment

$$\begin{aligned}\sum(-1)^{a(n+1)}q^{n^2+n+an-b^2} &= \sum[(3\mathfrak{H}_0 - 2h_0 - h'_0) - (3\mathfrak{H}_1 - 2h_1 - h'_1)]q^{\Delta}.\\ &= 3\sum(\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_1)q^{\Delta} + \sum(2h_1 + h'_1 - 2h_0 - h'_0)q^{\Delta},\end{aligned}$$

ce qui donne la loi du développement, suivant les puissances de q, de la série $\sum \frac{q^{n^2+n}\mathfrak{B}_n}{1+(-q)^n}$. La partie que nous avons isolée à dessein

$$\sum(2h_1 + h'_1 - 2h_0 - h'_0)q^{\Delta}$$

s'évalue à l'aide des résultats qui suivent.

Soit d'abord $\Delta = m$, m étant impair, on aura

$$\left\{\begin{aligned} h_0 &= \tfrac{1}{2}\varphi(m),\\ h_1 &= 0,\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} h'_0 &= \frac{1-(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{4}\varphi(m),\\ h'_1 &= \frac{1+(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{4}\varphi(m).\end{aligned}\right.$$

Et ensuite pour

$$\Delta = 2m,$$

$$\begin{cases} h_0 = \varphi(m), \\ h_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} h'_0 = 0, \\ h'_1 = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = 4m,$$

$$\begin{cases} h_0 = \varphi(m), \\ h_1 = \frac{1}{2}\varphi(m), \end{cases} \qquad \begin{cases} h'_0 = 0, \\ h'_1 = \frac{1}{2}\varphi(m). \end{cases}$$

$$\Delta = 4.2^\sigma m,$$

$$\begin{cases} h_0 = \varphi(m), \\ h'_1 = \frac{\sigma+1}{2}\varphi(m), \end{cases} \qquad \begin{cases} h'_0 = \varphi(m), \\ h'_1 = \frac{\sigma-1}{2}\varphi(m). \end{cases}$$

On en conclut

$$\begin{aligned} &\sum (2h_1 + h'_1 - 2h_0 - h'_0)\, q^\Delta \\ &= \sum \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}} - 2}{2} \varphi(m)\, q^m \\ &- \sum 2\varphi(m)\, q^{2m} \\ &- \sum \frac{1}{2}\varphi(m) q^{4m} \\ &+ \sum \frac{3\sigma - 5}{2} \varphi(m) q^{4.2^\sigma m}. \end{aligned}$$

Il en résulte qu'en remplaçant dans l'équation fondamentale

$$\theta_1^3 = 1 + 4\sum \frac{q^n}{1+(-q)^n} - 2\sum (-1)^n q^{n^2} \mathfrak{B}_n + 4\sum \frac{q^{n^2+n}\mathfrak{B}_n}{1+(-q)^n}$$

les trois séries par leurs valeurs, on verra les deux premières détruire cette partie qui provient des formes ambiguës, et il restera simplement

$$\theta_1^3 = \sum 12(\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_1)\, q^\Delta.$$

Toutefois, si Δ est un carré ou le triple d'un carré, le terme général doit être remplacé par

$$12\left(\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_1 + \frac{(-1)^n}{2}\right) q^{n^2}$$

ou

$$12\left(\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_1 + \frac{2}{3}\right) q^{3n^2}.$$

Mais on peut éviter ces deux cas d'exception en ajoutant deux séries de termes de la forme q^{n^2} et q^{3n^2}; si l'on fait, pour abréger,

$$\varepsilon = \sum q^{3n^2} = \theta_1(q^3),$$

on aura de cette manière

$$\theta_1^3 = \sum 12(\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_1) q^\Delta + 3\theta + 4\varepsilon - 6.$$

C'est le résultat auquel est parvenu M. Kronecker, en employant la considération des modules qui donnent lieu à la multiplication complexe, car, d'après les dénominations de ce savant géomètre, on aura

$$\mathfrak{H}_0 = F(\Delta), \qquad \mathfrak{H}_1 = G(\Delta) - F(\Delta),$$

et, par suite,

$$\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_1 = 2F(\Delta) - G(\Delta) = E(\Delta).$$

On a donc deux méthodes absolument distinctes qui rattachent par un double lien à la théorie des fonctions elliptiques les propositions de Legendre et de Gauss sur la décomposition des nombres en trois carrés. Ces illustres géomètres, en poursuivant au prix de tant d'efforts leurs profondes recherches sur cette partie de l'arithmétique supérieure, tendaient ainsi à leur insu vers une autre région de la science et donnaient un mémorable exemple de cette mystérieuse unité qui se manifeste parfois dans les travaux analytiques en apparence les plus éloignés.

SUR LA FORME

$x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 3t^2$;

Par M. J. LIOUVILLE.

On demande une expression simple du nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 3t^2,$$

où n est un entier donné, tandis que x, y, z, t sont des entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs.

La réponse à cette question est facile, quand on se souvient de ce que nous avons dit dans le cahier de septembre 1863 au sujet d'une autre forme qui se rattache intimement à celle dont nous parlons aujourd'hui.

Posons $n = 2^\alpha 3^\beta m$, m étant un entier impair, non divisible par 3, et désignons par $\zeta_1(m)$ la somme des diviseurs de m; puis distinguons les deux cas de $\alpha = 0$ et de $\alpha > 0$.

Pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impair $3^\beta m$, on a

$$N = 2(3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m).$$

Mais pour $\alpha > 0$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier pair, la formule est

$$N = 6(3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m).$$

Je crois pouvoir me dispenser d'ajouter des exemples.

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2;$$

Par M. J. LIOUVILLE.

1. On demande une expression simple du nombre des représentations d'un entier n quelconque par la forme à six variables

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2,$$

ou, ce qui revient au même, du nombre

$$\mathrm{N}\left(n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2\right)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2,$$

où x, y, z, t, u, v sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Nous poserons

$$n = 2^\alpha m,$$

m désignant un entier impair, et l'exposant α pouvant se réduire à zéro. La valeur de

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2\right)$$

dépendra naturellement de l'exposant α; elle dépend aussi de la valeur de m (mod. 8). Mais elle dépend surtout d'une fonction numérique de m, proportionnellement à laquelle

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2\right)$$

varie quand on considère la suite des entiers $2^\alpha m$ qui répondent à une même valeur donnée de α et de m (mod. 8). Nous dirons donc d'abord quelques mots de cette fonction numérique importante.

2. Décomposons l'entier m, de toutes les manières possibles, en un produit de deux facteurs conjugués d, δ, en sorte que

$$m = d\delta.$$

La fonction numérique dont nous parlons s'exprime par la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}+\frac{\delta^2-1}{8}} d^2.$$

En introduisant un symbole connu de Legendre, avec la signification plus étendue que lui attribue Jacobi, on peut encore l'écrire

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2.$$

On a

$$\left(\frac{-2}{\delta}\right) = \left(\frac{-2}{d}\right)$$

quand m est de l'une des deux formes

$$8\mu + 1, \quad 8\mu + 3;$$

on a donc alors

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2 = \sum \left(\frac{-2}{d}\right) d^2.$$

D'ailleurs

$$\left(\frac{-2}{d}\right) = 1$$

quand d est $\equiv 1$ ou 3 (mod. 8); tandis que

$$\left(\frac{-2}{d}\right) = -1$$

quand d est $\equiv 5$ ou 7 (mod. 8). Donc, quand il s'agit d'un entier m

de l'une des deux formes

$$8\mu + 1, \quad 8\mu + 3,$$

la fonction

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2$$

représente l'excès de la somme des carrés des diviseurs de m qui sont $\equiv 1$ ou 3 (mod. 8) sur la somme des carrés des diviseurs de m qui sont au contraire $\equiv 5$ ou 7 (mod. 8).

L'inverse a lieu quand m est de l'une des deux formes

$$8\mu + 5, \quad 8\mu + 7.$$

Dans ce cas

$$\left(\frac{-2}{\delta}\right) = -\left(\frac{-2}{d}\right),$$

et par suite

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2 = -\sum \left(\frac{-2}{d}\right) d^2.$$

Quand il s'agit d'un entier m de l'une des deux formes

$$8\mu + 5, \quad 8\mu + 7,$$

la fonction

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2$$

représente donc l'excès de la somme des carrés des diviseurs de m qui sont $\equiv 5$ ou 7 (mod. 8) sur la somme des carrés des diviseurs de m qui sont au contraire $\equiv 1$ ou 3 (mod. 8).

Pour $m = 1, 3, 5, 7, 9, 11$, etc., les valeurs respectives de la fonction

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2$$

sont

$$1, \ 10, \ 24, \ 48, \ 91, \ 122, \ \text{etc.}$$

La fonction

$$\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2$$

peut aussi s'exprimer par un produit. Soit

$$m = a^\lambda b^\rho \ldots,$$

a, b, etc., désignant les facteurs premiers de m. Le produit dont il s'agit sera celui des quantités suivantes :

$$a^{2\lambda} + \left(\frac{-2}{a}\right)a^{2\lambda-2} + a^{2\lambda-4} + \left(\frac{-2}{a}\right)a^{2\lambda-6} + \ldots,$$

$$b^{2\rho} + \left(\frac{-2}{b}\right)b^{2\rho-2} + b^{2\rho-4} + \left(\frac{-2}{b}\right)b^{2\rho-6} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On pourra donc, suivant une notation connue, le représenter par

$$\Pi\left[a^{2\lambda} + \left(\frac{-2}{a}\right)a^{2\lambda-2} + a^{2\lambda-4} + \left(\frac{-2}{a}\right)a^{2\lambda-6} + \ldots\right].$$

Par cette expression en produit, on voit que l'on a essentiellement

$$\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2 > 0.$$

Au contraire la fonction

$$\sum\left(\frac{-2}{d}\right)d^2,$$

numériquement égale à la nôtre, prend des valeurs tantôt positives, tantôt négatives.

5. La valeur générale de

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2\right)$$

s'obtient en multipliant la fonction numérique de m dont nous venons de parler, savoir

$$\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2,$$

ou

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}+\frac{\delta^2-1}{8}} d^2,$$

par le facteur suivant

$$\frac{2}{3}\left[4^{\alpha+2} - \left(\frac{-2}{m}\right)\right],$$

qui dépend de l'exposant α et de la valeur de m (mod. 8).

Cette équation si simple

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2\right) = \frac{2}{3}\left[4^{\alpha+2} - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2,$$

j'ai eu, je l'avoue, quelque peine à l'établir dans toute sa généralité. Je l'ai d'abord démontrée pour le cas de m égal à $8\mu + 5$ ou $8\mu + 7$; mais le cas de m égal à $8\mu + 1$ ou $8\mu + 3$ échappait à mes formules. Enfin j'ai réussi à trouver une méthode propre à tous les cas. Je suis donc certain maintenant de l'exactitude absolue de l'équation que je viens de poser.

4. Considérons d'abord un nombre impair m, et faisons $\alpha = 0$. Notre formule donne

$$\mathrm{N}\left(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2\right) = \frac{2}{3}\left[16 - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2.$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{N}\left(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2\right) = 10\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2$$

quand m est de l'une des deux formes

$$8\mu + 1, \quad 8\mu + 3,$$

mais

$$\mathrm{N}\left(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2\right) = \frac{34}{3}\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2$$

quand m est de l'une des deux formes

$$8\mu + 5, \quad 8\mu + 7.$$

Ainsi on a

$$N(1 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 10,$$

ce qui s'accorde avec les équations

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2,$$
$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2,$$
$$1 = 0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2,$$
$$1 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 2.0^2,$$
$$1 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2,$$

qui donnent pour l'entier 1 dix représentations par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2.$$

On a ensuite

$$N(3 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 100;$$

or cela est confirmé par les identités

$$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2$$

et

$$3 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.1^2,$$

où l'on devra marquer du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls, puis effectuer les permutations convenables. La première identité fournira de cette manière quatre-vingts représentations de l'entier 3 et la seconde en fournira vingt.

L'équation

$$N(5 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{34}{3} \cdot 24 = 272$$

est aisée à vérifier au moyen des identités

$$5 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.0^2,$$
$$5 = 1^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2,$$
$$5 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2.1^2;$$

la première fournit trente-deux représentations de l'entier 5, la seconde en fournit quatre-vingts, le troisième cent soixante. Or

$$32 + 80 + 160 = 272.$$

Enfin on a

$$N(7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 544.$$

Pour vérifier cette valeur, on se servira des identités

$$7 = 0^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.0^2,$$
$$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.1^2,$$
$$7 = 1^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.1^2.$$

En y affectant du double signe ± 1 les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en y opérant les permutations convenables, on tirera de la première de ces identités trois cent vingt représentations du nombre 7, la seconde en fournira soixante-quatre, la troisième cent soixante; or

$$320 + 64 + 160 = 544.$$

5. Pour les entiers impairement pairs $2m$, on a

$$N(2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{2}{3}\left[64 - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2,$$

c'est-à-dire

$$N(2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 42\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2$$

quand m est égal à $8\mu + 1$ ou $8\mu + 3$, mais

$$N(2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{130}{3}\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2$$

quand m s'exprime par $8\mu + 5$ ou $8\mu + 7$.

Ainsi

$$N(2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 42;$$

or, au moyen des deux identités

$$2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2$$

et

$$2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.1^2,$$

on obtient en effet quarante-deux représentations de l'entier 2, la première identité fournissant quarante représentations et la seconde en fournissant deux.

On a ensuite

$$N(6 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 42.10 = 420.$$

Or les identités

$$6 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2,$$
$$6 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 2.1^2,$$
$$6 = 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.1^2$$

fournissent effectivement quatre cent vingt représentations de l'entier 6; la première en donne deux cent quarante, la seconde cent soixante, la troisième vingt.

L'équation

$$N(10 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{130}{3} \cdot 24 = 1040$$

se vérifie semblablement au moyen des identités

$$10 = 1^2 + 3^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2,$$
$$10 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 + 2.0^2,$$
$$10 = 2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.1^2,$$
$$10 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.1^2,$$
$$10 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.2^2;$$

les nombres de représentations qu'elles fournissent respectivement sont quatre-vingts, quatre cent quatre-vingts, quatre-vingts, trois cent vingt, quatre-vingts; or

$$80 + 480 + 80 + 320 + 80 = 1040.$$

Enfin on a, d'après notre formule,

$$N(14 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{130}{3}\cdot 48 = 2080;$$

et les identités

$$14 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2,$$
$$14 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 2.0^2,$$
$$14 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 2.1^2,$$
$$14 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 2.1^2,$$
$$14 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2.2^2$$

montrent que ce résultat est exact. Elles fournissent des représentations de l'entier 14, dont le nombre est respectivement, de la première identité à la dernière,

480, 320, 640, 160, 480;

le total fait précisément 2080.

6. Passant aux entiers pairement pairs, nous nous bornerons à appliquer la formule

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{2}{3}\left[4^{\alpha+2} - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2$$

aux deux plus petits multiples de 4, savoir 4 et 8.

D'abord nous trouvons

$$N(4 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 170.$$

Or ce résultat est confirmé par les identités

$$4 = 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2,$$
$$4 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 2.0^2,$$
$$4 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.1^2,$$

dont la première fournit dix représentations du nombre 4, tandis que chacune des deux autres en fournit quatre-vingts.

Pour le nombre 8, on a

$$N(8 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 682.$$

Les identités à employer cette fois sont

$$8 = 2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2,$$
$$8 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.0^2,$$
$$8 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2.1^2,$$
$$8 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.2^2.$$

Elles fournissent des représentations de l'entier 8, dont le nombre compté de la première identité à la dernière est respectivement

$$40,\ 160,\ 480,\ 2;$$

or on a

$$40 + 160 + 480 + 2 = 682.$$

La vérification cherchée a donc lieu.

7. Nous avons donné l'expression générale du nombre total

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2)$$

des solutions, tant propres qu'impropres, de l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2.$$

Mais on peut demander séparément celle du nombre

$$M(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2)$$

des solutions propres, pour lesquelles les indéterminées x, y, z, t, u, v ne sont pas toutes divisibles par un même facteur > 1.

Pour l'obtenir, il faudra substituer à la somme

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2,$$

ou au produit qui peut remplacer cette somme, le produit suivant

$$\Pi\left[a^{2\lambda}+\left(\frac{-2}{a}\right)a^{2\lambda-2}\right].$$

qui se rapporte aux facteurs premiers a, b,..., de l'entier m mis sous la forme

$$m=a^{\alpha}b^{\beta}\ldots;$$

pour en déduire la valeur de

$$\mathrm{M}\,(2^{\alpha}m=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2),$$

il faudra multiplier ce produit par un facteur dépendant de α et de la valeur de m (mod. 8), dont nous allons donner l'expression suivant les cas divers qui peuvent se présenter.

Dans le cas d'un entier impair, ou de $\alpha=0$, ce facteur est

$$\frac{2}{3}\left[16-\left(\frac{-2}{m}\right)\right]:$$

pour les entiers impairement pairs, ou pour $\alpha=1$, il devient

$$\frac{2}{3}\left[64-\left(\frac{-2}{m}\right)\right];$$

enfin, pour $\alpha>1$, il est égal à

$$5.2^{2\alpha+1}.$$

Ainsi, pour l'entier 4, il n'y a que cent soixante solutions propres; dix solutions impropres complètent le nombre total cent soixante-dix, obtenu plus haut : ce sont celles qui répondent à l'identité

$$4=2^2+0^2+0^2+0^2+0^2+2.0^2.$$

8. En nous occupant du nombre des solutions de l'équation

$$n=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2,$$

nous avons admis jusqu'ici que les entiers x, y, z, t, u, v peuvent être indifféremment pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs. On peut aussi désirer de savoir quel est le nombre

$$\mathfrak{N}(n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2)$$

des solutions de cette même équation quand on exige que x, y, z, t, u, v soient des entiers impairs et positifs, d'ailleurs quelconques. Il est bien clair que ce nombre est nul quand l'entier donné n n'est pas de la forme $8\mu + 7$. Mais quelle est la valeur de

$$\mathfrak{N}(8\mu + 7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2)?$$

Pour répondre à cette question, il faut décomposer $8\mu + 7$ de toutes les manières possibles en un produit $d\delta$ de deux facteurs conjugués, puis prendre la quarante-huitième partie de la somme

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2.$$

On aura ainsi le nombre demandé. En d'autres termes,

$$\mathfrak{N}(8\mu + 7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{1}{48} \sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2.$$

Par exemple, on a

$$\mathfrak{N}(7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 1;$$

ce qui est confirmé par l'équation

$$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.1^2.$$

On a ensuite

$$\mathfrak{N}(15 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{240}{48} = 5;$$

et cela s'accorde avec l'identité

$$15 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.1^2,$$

où 3^2 peut occuper cinq places distinctes.

Enfin

$$\mathfrak{N}(23 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{528}{48} = 11,$$

résultat exact, comme on peut le voir au moyen des identités

$$23 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.3^2,$$
$$23 = 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.1^2;$$

la première fournit une représentation de l'entier 23, la seconde en fournit dix.

Si, tout en n'admettant pour x, y, z, t, u, v que des entiers impairs et positifs dans l'équation

$$8\mu + 7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2,$$

on excluait les systèmes x, y, z, t, u, v où les indéterminées possèdent un facteur commun > 1, le nombre des solutions pourrait devenir inférieur à

$$\frac{1}{48}\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2.$$

Il s'exprimerait alors par

$$\frac{1}{48}\prod\left[a^{2\lambda} + \left(\frac{-2}{a}\right)a^{2\lambda-2}\right],$$

le produit indiqué se rapportant aux facteurs premiers a, b, etc., de l'entier $8\mu + 7 = a^\lambda b^\mu \ldots$; je crois pouvoir me dispenser d'ajouter des exemples.

9. En terminant, j'indiquerai celle de mes *formules générales* qui m'a conduit, dans le cas d'un entier impair m (le seul difficile ici), à la valeur de

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2).$$

C'est la formule marquée (I) dans mon cinquième article, à la page 277 du cahier d'août 1858. En y faisant

$$f(x) = x\sin\left(\frac{x\pi}{4}\right),$$

on obtient une formule particulière qui mène au but quand on la discute convenablement, en s'appuyant sur ce que j'ai donné au sujet de la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$ dans un article inséré au cahier de juillet 1861 (p. 225).

Ayant ainsi prouvé que

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{1}{3}\left[16 - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2,$$

on en conclut facilement, par des considérations arithmétiques très-simples, que

$$N(2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{2}{3}\left[64 - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2.$$

et ensuite que

$$N(4m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{2}{3}\left[256 - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2.$$

On pourrait continuer et s'élever graduellement de $4m$ à $8m$, de $8m$ à $16m$, etc.; mais il vaut mieux tout achever en une seule fois. Désignons, en effet, par $\psi(\alpha)$ la fonction

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2),$$

où nous ne voulons pour le moment faire varier que α, et nous établirons sans peine l'égalité

$$\psi(\alpha + 3) - \psi(\alpha + 1) = 4[\psi(\alpha + 2) - \psi(\alpha)],$$

qui est exacte même pour $\alpha = 0$. De là notre équation générale

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{2}{3}\left[4^{\alpha+2} - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2.$$

C'est aussi par des considérations arithmétiques fort simples que l'on déduit la valeur de

$$\mathfrak{N}(8\mu + 7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2),$$

relative au cas des indéterminées impaires et positives, de celle de

$$N(8\mu + 7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2).$$

Quant à la recherche du nombre des solutions propres, elle n'offre aucune difficulté.

SUR LA FORME

$$x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2);$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande une expression simple du nombre des représentations d'un entier donné n par la forme à six variables

$$x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

c'est-à-dire du nombre

$$N[n = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

où x, y, z, t, u, v sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Nous poserons, comme dans l'article précédent, dont nous conservons toutes les notations,

$$n = 2^\alpha m,$$

m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro; puis nous introduirons de nouveau la fonction numérique

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2,$$

dans l'expression de laquelle le signe sommatoire porte sur les diviseurs conjugués d, δ de l'entier

$$m = d\delta.$$

2. Le cas le plus simple est celui d'un entier pair. En effet, dans

l'hypothèse de $\alpha > 0$, l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

exige que x soit pair, et en faisant

$$x = 2x_1,$$

elle se change en celle-ci

$$2^{\alpha-1} m = 2x_1^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2,$$

qui la remplace complétement et qu'on peut écrire, en changeant de lettres,

$$2^{\alpha-1} m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2.$$

La valeur de

$$\mathrm{N}\left[2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

est donc égale à celle de

$$\mathrm{N}\left(2^{\alpha-1} m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2\right),$$

que nous avons donnée dans l'article précédent.

Nous sommes ainsi conduits à l'équation suivante

$$\mathrm{N}\left[2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right] = \frac{2}{3}\left[4^{\alpha+1} - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2.$$

Toutefois cette équation n'est démontrée jusqu'ici que dans l'hypothèse de $\alpha > 0$. Mais je me suis assuré qu'elle subsiste même pour $\alpha = 0$, de sorte qu'elle résout la question proposée, même dans le cas d'un nombre impair. Elle devient alors

$$\mathrm{N}\left[m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right] = \frac{2}{3}\left[4 - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{N}\left[m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right] = 2\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2$$

quand m est de l'une des deux formes

$$8\mu + 1, \quad 8\mu + 3,$$

et

$$N[m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = \frac{10}{3}\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2$$

quand m est au contraire de l'une des deux formes $8\mu + 5$, $8\mu + 7$. Or j'ai réussi à prouver que ces résultats sont exacts, en démontrant *à priori* que, dans le premier cas, la valeur de

$$N[m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2],$$

vaut le cinquième de celle de

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2),$$

tandis que dans le second cas elle est avec elle dans le rapport de 5 à 17. La démonstration est fondée sur les considérations arithmétiques les plus simples.

5. Appliquons la formule

$$N[2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = \frac{2}{3}\left[4^{\alpha+1} - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2$$

à quelques exemples.

Commençons par les nombres impairs. Notre formule donne d'abord

$$N[1 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 2,$$

résultat évidemment exact. Elle donne ensuite

$$N[3 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 20,$$

ce qui s'accorde avec l'équation

$$3 = (\pm 1)^2 + 2[(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2],$$

où $(\pm 1)^2$ peut occuper cinq places distinctes entre les parenthèses.

L'équation

$$N[5 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 80$$

n'est pas moins facile à vérifier au moyen de l'identité

$$5 = 1^2 + 2(1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$

en y affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en y opérant les permutations convenables.

Enfin, on trouve

$$N[7 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 160;$$

et l'identité

$$7 = 1^2 + 2(1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2)$$

sert à constater l'exactitude de ce dernier fait.

Terminons par l'équation

$$N[9 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 182.$$

La vérification se tire cette fois des trois identités :

$$9 = 3^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$
$$9 = 1^2 + 2(2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$
$$9 = 1^2 + 2(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2).$$

Relativement aux nombres pairs, bornons-nous aux nombres 2, 4, 8. Notre formule donne

$$N[2 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 10,$$

ce qui est confirmé par l'identité

$$2 = 0^2 + 2[(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2],$$

où l'on peut mettre $(\pm 1)^2$ à cinq places distinctes. On a ensuite

$$N[4 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 42;$$

or les deux identités

$$4 = (\pm 2)^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2)$$

et

$$4 = 0^2 + 2[(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2]$$

vérifient ce fait, si l'on a soin d'opérer dans la seconde d'entre elles les permutations convenables. Enfin l'équation

$$N[8 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 170$$

s'accorde avec les identités

$$8 = 2^2 + 2(1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$
$$8 = 0^2 + 2(2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$
$$8 = 0^2 + 2(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2),$$

pourvu qu'on marque du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et qu'on effectue les permutations voulues.

4. La formule

$$N\left[2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right] = \frac{2}{3}\left[4^{\alpha+1} - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2$$

donne le nombre total des solutions propres ou impropres de l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2);$$

mais on peut aussi demander séparément le nombre

$$M\left[2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right]$$

des solutions propres, pour lesquelles aucun entier > 1 ne divise jamais à la fois x, y, z, t, u et v. Pour l'obtenir, il faut former le produit

$$\Pi\left[a^{2\lambda} + \left(\frac{-2}{a}\right)a^{2\lambda-2}\right],$$

relatif aux facteurs premiers a, b, etc., de l'entier

$$m = a^\lambda b^\beta \ldots,$$

puis le multiplier par un facteur convenable, qui dépend de l'exposant α et de la valeur de m (mod. 8). Pour $\alpha = 0$, ce facteur est

$$\frac{2}{3}\left[4 - \left(\frac{-2}{m}\right)\right];$$

pour $\alpha = 1$, il devient

$$\frac{2}{3}\left[16 - \left(\frac{-2}{m}\right)\right];$$

enfin pour $\alpha > 1$, il s'exprime par

$$5 . 2^{2\alpha - 1}.$$

Vérifions ces assertions sur quelques exemples.

D'après ce que nous venons de dire,

$$M[9 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 180.$$

Cela est exact. Le nombre total des solutions de l'équation

$$9 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

est cent quatre-vingt-deux ; mais il y a deux solutions impropres, fournies par l'équation

$$9 = (\pm 3)^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2).$$

Il faut aussi que

$$M[4 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 40,$$

et cela est exact. L'équation

$$4 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

offre quarante-deux solutions, mais deux d'entre elles sont impropres : ce sont celles qui répondent à l'identité

$$4 = (\pm 2)^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2).$$

Enfin, il faut que

$$M[8 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 160;$$

or cela est vrai. L'équation

$$8 = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

a cent soixante-dix solutions ; mais il y en a dix d'impropres, résultant de l'identité

$$8 = 0^2 + 2(2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2).$$

Nous ne pousserons pas plus loin ces calculs.

SUR LA FORME
$x^2 + xy + y^2 + 6z^2 + 6zt + 6t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On demande une expression simple du nombre

$$N(n = x^2 + xy + y^2 + 6z^2 + 6zt + 6t^2)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + xy + y^2 + 6z^2 + 6zt + 6t^2,$$

où n est un entier donné, et x, y, z, t des entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs.

Répondre à cette question sera très-facile si l'on se souvient de ce que nous avons dit dans le cahier de septembre 1863 au sujet de la forme

$$x^2 + xy + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2.$$

Mais d'abord observons que l'équation proposée n'a aucune solution quand

$$n = 3g + 2.$$

En d'autres termes, on a

$$N(3g + 2 = x^2 + xy + y^2 + 6z^2 + 6zt + 6t^2) = 0.$$

Restent les deux cas de

$$n = 3g + 1$$

et de

$$n = 3g.$$

Le cas de $n = 3g + 1$ se traite en observant que la valeur de

$$N(3g + 1 = x^2 + xy + y^2 + 6z^2 + 6zt + 6t^2)$$

est égale à celle de

$$N(3g + 1 = x^2 + xy + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2),$$

laquelle est connue par l'article cité.

Semblablement la valeur demandée de

$$N(3g = x^2 + xy + y^2 + 6z^2 + 6zt + 6t^2)$$

est égale à celle de

$$N(g = x^2 + xy + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2).$$

La question proposée est donc résolue.

SUR LA FORME

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3z^2 + 3zt + 3t^2;$$

Par M. J. LIOUVILLE.

La détermination du nombre

$$\mathrm{N}(n = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3z^2 + 3zt + 3t^2)$$

des solutions de l'équation

$$n = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3z^2 + 3zt + 3t^2,$$

où n est un entier donné, et x, y, z, t des entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs, ne peut offrir aucune difficulté à ceux qui se souviennent de ce que nous avons donné dans le cahier de septembre 1863 au sujet de la forme

$$x^2 + xy + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2.$$

Mais d'abord observons que l'équation proposée est impossible quand

$$n = 3g + 1.$$

En d'autres termes, on a

$$\mathrm{N}(3g + 1 = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3z^2 + 3zt + 3t^2) = 0.$$

Restent les deux cas de

$$n = 3g + 2$$

et de

$$n = 3g.$$

On traite le premier en observant que la valeur demandée de

$$\mathrm{N}(3g + 2 = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3z^2 + 3zt + 3t^2)$$

est égale à celle de

$$N(3g + 2 = x^2 + xy + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2)$$

qui est connue par l'article cité.

De même on verra que la valeur demandée de

$$N(3g = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3z^2 + 3zt + 3t^2)$$

est égale à celle de

$$N(g = x^2 + xy + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2).$$

La question proposée se trouve ainsi résolue.

MÉTHODE NOUVELLE

Pour l'intégration des équations différentielles linéaires ne contenant qu'une variable indépendante;

PAR M. J. CAQUÉ.

La méthode des limites est applicable à l'étude des équations différentielles. De même que, pour découvrir les propriétés d'une courbe, on cherche les propriétés communes à des polygones qui tendent à se confondre avec elle; de même, pour découvrir les propriétés d'une équation différentielle, on peut choisir une équation aux différences finies se confondant avec la proposée lorsqu'on annule les différences des variables indépendantes, puis chercher les propriétés de cette équation qui sont indépendantes des grandeurs de ces différences.

Ces considérations m'ont conduit à une méthode nouvelle pour l'intégration des équations différentielles qui, ne contenant qu'une variable indépendante et une seule fonction de cette variable, sont linéaires par rapport à la fonction et à ses dérivées.

L'exposition de cette méthode est l'objet de ce Mémoire.

1. Toute équation différentielle ne contenant qu'une variable indépendante, et qui est linéaire par rapport à la fonction et à ses dérivées, peut être mise sous la forme suivante

$$(\mathrm{X})\quad \frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = \mathrm{A}(x) + \mathrm{A}_0(x)\,y + \mathrm{A}_1(x)\frac{dy}{dx} + \mathrm{A}_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + \mathrm{A}_p(x)\frac{d^py}{dx^p},$$

où $\mathrm{A}(x)$, $\mathrm{A}_0(x)$, $\mathrm{A}_1(x)$,..., $\mathrm{A}_p(x)$, désignent des fonctions données de la variable indépendante.

Je me propose de trouver l'intégrale générale de l'équation (X).

L'équation aux différences finies

$$(X') \quad \frac{\Delta^{p+1} y}{\Delta x^{p+1}} = A(x) + A_0(x) y + A_1(x) \frac{\Delta y}{\Delta x} + A_2(x) \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \ldots + A_p(x) \frac{\Delta^p y}{\Delta x^p},$$

où Δx est une constante quelconque, se confond évidemment avec la précédente lorsque $\Delta x = 0$; toute équation équivalente à (X') deviendra donc, à cette limite, une équation équivalente à (X); en conséquence, si je trouve une équation équivalente à (X'), fournissant, à la limite, l'expression de l'une des dérivées de y en fonction de x, le calcul de l'intégrale générale de l'équation (X) se réduira à un nombre limité de quadratures.

Ainsi l'intégration de l'équation (X) est mon but, et la transformation de l'équation (X') mon moyen.

2. Avant d'entrer en matière, je vais faire connaître, pour n'y plus revenir, les hypothèses dont je ne m'écarterai jamais.

Pour donner à mes résultats toute la généralité qu'ils comportent, je supposerai que la variable reçoit des valeurs de la forme $u + v\sqrt{-1}$, où u et v désignent des quantités réelles; mais ces valeurs formeront toujours une progression par différence, car l'équation (X') n'a pour limite l'équation (X) que dans le cas où Δx est une constante. Ainsi, en considérant u et v comme les coordonnées rectangulaires d'un point du plan, toutes les valeurs que j'attribuerai à la variable seront représentées par des points en ligne droite et équidistants. Ces points peuvent être d'ailleurs aussi rapprochés qu'on voudra, puisque la constante Δx est arbitraire.

Je supposerai qu'en chaque point du segment de droite joignant les valeurs extrêmes de la variable, les coefficients des équations (X) et (X') ont des valeurs finies. Par exemple, on voit que les valeurs réelles de x, pour lesquelles quelques-unes des fonctions $A(x)$, $A_0(x)$, $A_1(x), \ldots$, cessent d'être finies, sont représentées par des points de l'axe des abscisses qui le divisent en segments; dans le cas particulier où l'on ne donnerait à la variable que des valeurs réelles, je supposerais que les valeurs extrêmes de x appartiennent à un même segment, quelconque d'ailleurs.

Les coefficients des équations (X) et (X′) peuvent souffrir des solutions de continuité.

Tous mes calculs sont faits en vue de l'équation (X); je rencontrerai souvent des quantités qu'il est inutile de développer, parce qu'elles doivent disparaître à la limite, et dont cependant je crois bon de conserver la trace; je les désigne toutes, sans distinction, par la lettre ε. Ainsi ε désignera toujours une quantité infiniment petite, c'est-à-dire une quantité qui s'annule avec l'accroissement de la variable indépendante.

Mon Mémoire est divisé en quatre chapitres :

Dans le premier je fais connaître une expression du rapport $\frac{\Delta^q y}{\Delta x^q}$;

Dans le second je transforme l'équation (X′);

Dans le troisième j'intègre l'équation (X);

Dans le quatrième j'applique ma méthode aux équations linéaires du premier ordre et aux équations linéaires à coefficients constants.

Les équations dont je me sers sont désignées : les unes par des numéros d'ordre, les autres par des lettres; ces dernières sont celles sur lesquelles je veux attirer plus particulièrement l'attention du lecteur.

CHAPITRE PREMIER.

D'une forme qu'on peut donner au rapport $\frac{\Delta^q y_m}{\Delta z^q}$ lorsque Δz est une constante et y une fonction quelconque de z.

3. Soit

$$x_0,\ z_1,\ z_2, \ldots,\ z_{n-1},\ x$$

une suite de valeurs quelconques d'une variable, et soit aussi

$$y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_{n-1},\ y,$$

la suite des valeurs correspondantes d'une fonction quelconque de cette variable. En représentant par $\Delta^q y_k$ la différence $q^{ième}$ de y_k, et en posant, pour abréger,

$$S_p = y_0 + \frac{m}{1}\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\Delta^p y_0,$$

et

$$R_p = \frac{(m-1)\ldots(m-p)}{1.2\ldots p}\Delta^{p+1}y_0 + \frac{(m-2)\ldots(m-p-1)}{1.2\ldots p}\Delta^{p+1}y_1 + \ldots$$
$$+ \frac{p(p-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots p}\Delta^{p+1}y_{m-p-1},$$

on a, quels que soient m et p,

$$(1) \qquad y_m = S_p + R_p.$$

On trouvera la démonstration de cette expression dans une Note sur la formule de Taylor, que M. Liouville m'a fait l'honneur d'insérer dans le tome X de son journal.

Je suppose maintenant que les valeurs de la variable forment une progression par différence dont la raison est Δz, et, en me fondant sur cette hypothèse, je vais mettre la valeur de y_m sous une autre forme.

Je désigne par

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_p,$$

les valeurs que prennent la fonction et ses p premières dérivées, quand on y remplace la variable par sa valeur initiale x_0; et je pose

$$(A) \qquad \theta(z) = a_0 + a_1\frac{z-x_0}{1} + a_2\frac{(z-x_0)^2}{1.2} + \ldots + a_p\frac{(z-x_0)^p}{1.2\ldots p}.$$

Comme on a, quel que soit l'entier r,

$$r = \frac{z_r - x_0}{\Delta z},$$

on peut substituer à S_p l'expression équivalente

$$y_0 + \frac{z_m - x_0}{1}\frac{\Delta y_0}{\Delta z} + \frac{(z_m - x_0)(z_m - x_0 - \Delta z)}{1.2}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta z^2} + \ldots$$
$$+ \frac{(z_m - x_0)(z_m - x_0 - \Delta z)\ldots[(z_m - x_0) - (p-1)\Delta z]}{1.2\ldots p}\frac{\Delta^p y_0}{\Delta z^p},$$

et cette dernière peut être remplacée par

$$\theta(z_m) + \varepsilon;$$

car, lorsque Δz tend vers o, les rapports $\frac{\Delta y_0}{\Delta z}, \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta z^2}, \ldots, \frac{\Delta^p y_0}{\Delta z^p}$, tendent vers leurs limites respectives $a_1, a_2, \ldots, a_p$, et le produit

$$(z_m - x_0)(z_m - x_0 - \Delta z)\ldots[(z_m - x_0) - (k-1)\Delta z]$$

tend vers $(z_m - x_0)^k$ pour toutes les valeurs finies de k.

Quant à la valeur de R_p on peut toujours, en lui ajoutant p termes identiquement nuls, l'écrire de la manière suivante :

$$R_p = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(m-i)(m-i-1)\ldots[(m-i)-(p-1)]}{1.2\ldots p} \Delta^{p+1} y_{i-1};$$

mais, si l'on pose $z_i = t_i$, et si l'on remplace m par $\frac{z_m - x_0}{\Delta z}$ et i par $\frac{t_i - x_0}{\Delta z}$, la différence $m - i$ deviendra $\frac{z_m - t_i}{\Delta z}$: par suite le produit

$$\frac{(m-i)(m-i-1)\ldots[(m-i)-(p-1)]}{1.2\ldots p} \Delta^{p+1} y_{i-1}$$

prendra la forme

$$\frac{(z_m - t_i)(z_m - t_i - \Delta z)\ldots[(z_m - t_i) - (p-1)\Delta z]}{1.2\ldots p} \cdot \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}} \Delta z,$$

que l'on peut remplacer par

$$\left[\frac{(z_m - t_i)^p}{1.2\ldots p} + \varepsilon\right] \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}} \Delta z;$$

et l'on trouve ainsi pour y_m, l'expression suivante :

$$(2) \qquad y_m = \theta(z_m) + \varepsilon + \sum_{t_i = z_1}^{t_i = z_m} \left[\frac{(z_m - t_i)^p}{1.2\ldots p} + \varepsilon\right] \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}} \Delta z.$$

4. Avant de poursuivre, je ferai remarquer que cette expression fournit, lorsqu'on passe à la limite, l'intégrale générale de l'équation (X) dans le cas où, y n'y entrant que par sa dérivée de l'ordre le plus

élevé, elle se réduit à

$$(3) \qquad \frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = \mathrm{A}(x).$$

Puisque la différence $t_i - t_{i-1} = \Delta z = \Delta t$ s'évanouit avec Δz, et puisque $z_n = x$ et $y_n = y$, on peut remplacer dans l'équation (2)

$$y_m, \quad \theta(z_m), \quad z_m, \quad \frac{(z_m - t_i)^p}{1.2\ldots p} + \varepsilon \quad \text{et} \quad \Delta z,$$

respectivement par

$$y, \quad \theta(x), \quad x, \quad \frac{(x - t_{i-1})^p}{1.2\ldots p} + \varepsilon \quad \text{et} \quad \Delta t;$$

cette équation devient alors

$$y = \theta(x) + \varepsilon + \sum_{t_{i-1}=x_0}^{t_{i-1}=x} \left[\frac{(x - t_{i-1})^p}{1.2\ldots p} + \varepsilon\right] \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta t^{p+1}} \Delta t.$$

Lorsque n croît indéfiniment, les diverses valeurs du rapport $\frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta t^{p+1}}$ tendent, en vertu de l'équation (3), vers les diverses valeurs de $\mathrm{A}(t_{i-1})$, et comme aucune de celles-ci n'est infinie, on pourra, à la limite, supprimer les infiniment petits ε qui figurent dans la dernière équation, et y remplacer le signe $\sum$ par le signe $\int$.

On obtient ainsi, pour l'intégrale cherchée, la valeur connue

$$(4) \qquad y = \theta(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^p}{1.2\ldots p} \mathrm{A}(t)\, dt.$$

5. Puisque la formule (1) est applicable à toutes les fonctions d'une variable, et puisque p y représente un entier positif quelconque, on peut y remplacer les diverses valeurs de y par les valeurs correspondantes du quotient $\frac{\Delta^q y}{\Delta z^q}$, et p par $p-q$, si toutefois q est moindre que p. Si, de plus, on a égard à ce que, Δz étant une constante, on a

$$\Delta^r \frac{\Delta^q y_k}{\Delta z^q} = \frac{\Delta^{q+r} y_k}{\Delta z^q},$$

on trouvera

$$S_{p-q} = \frac{\Delta^q y_0}{\Delta z^q} + \frac{m}{1}\frac{\Delta^{q+1} y_0}{\Delta z^q} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{\Delta^{q+2} y_0}{\Delta z^q} + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-p+q+1)}{1.2\ldots(p-q)}\frac{\Delta^p y_0}{\Delta z^q},$$

$$R_{p-q} = \frac{(m-1)\ldots(m-p+q)}{1.2\ldots(p-q)}\frac{\Delta^{p+1} y_0}{\Delta z^q} + \frac{(m-2)\ldots(m-p+q-1)}{1.2\ldots(p-q)}\frac{\Delta^{p+1} y_1}{\Delta z^q} + \ldots$$
$$+ \frac{(p-q)\ldots 2.1}{1.2\ldots(p-q)}\frac{\Delta^{p+1} y_{m-p+q-1}}{\Delta z^q},$$

et

$$(5) \qquad \frac{\Delta^q y_m}{\Delta z^q} = S_{p-q} + R_{p-q}.$$

En reproduisant les raisonnements et les calculs qui ont conduit de la formule (1) à la formule (2), on transformera la formule (5).

D'abord, à l'aide de l'équation

$$r = \frac{z_r - x_0}{\Delta z}$$

et de la dérivée $q^{ième}$ de l'équation (A), on prouvera que l'on a

$$S_{p-q} = \left[\frac{d^q\theta(z)}{dz^q}\right]_m + \varepsilon;$$

$\left[\frac{d^q\theta(z)}{dz^q}\right]_m$ représentant la valeur de $\frac{d^q\theta(z)}{dz^q}$ correspondante à $z = z_m$.

On prouvera ensuite que R_{p-q} peut prendre la forme

$$\sum_{t_i=z_1}^{t_i=z_m}\left[\frac{(z_m-t_i)^{p-q}}{1.2\ldots(p-q)} + \varepsilon\right]\frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}}\Delta z;$$

et l'on trouvera ainsi la formule suivante

$$(B) \qquad \frac{\Delta^q y_m}{\Delta z^q} = \left[\frac{d^q\theta(z)}{dz^q}\right]_m + \varepsilon + \sum_{t_i=z_1}^{t_i=z_m}\left[\frac{(z_m-t_i)^{p-q}}{1.2\ldots(p-q)} + \varepsilon\right]\frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}}\Delta z.$$

où l'on pourra attribuer à q les valeurs entières $0, 1, 2, \ldots, p$; car,

moyennant des conventions bien connues, on peut considérer l'équation (2) et l'équation évidente

$$\frac{\Delta^p y_m}{\Delta z^p} = \frac{\Delta^p y_0}{\Delta z^p} + \left[\frac{\Delta^{p+1} y_0}{\Delta z^{p+1}} + \frac{\Delta^{p+1} y_1}{\Delta z^{p+1}} + \ldots + \frac{\Delta^{p+1} y_{m-1}}{\Delta z^{p+1}}\right] \Delta z$$

comme n'étant que des cas particuliers de l'équation (B).

CHAPITRE II.

Transformation de l'équation (X').

6. Dans le chapitre précédent y désignait une fonction quelconque de la variable indépendante; je supposerai maintenant que cette fonction satisfait à l'équation

$$(\mathrm{X}') \quad \frac{\Delta^{p+1} y}{\Delta x^{p+1}} = \mathrm{A}(x) + \mathrm{A}_0(x) y + \mathrm{A}_1(x) \frac{\Delta y}{\Delta x} + \mathrm{A}_2(x) \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \ldots + \mathrm{A}_p(x) \frac{\Delta^p y}{\Delta x^p}.$$

L'objet du présent chapitre est de faire connaître une équation qu'on peut toujours substituer à la précédente lorsque les valeurs de x forment une progression arithmétique.

Je ferai usage de deux fonctions que je représenterai, l'une par $\mathrm{F}(z)$, l'autre par $f(z, t)$, et qui se déduisent simplement du second membre de l'équation (X').

Pour former la première, je remplace, dans le second membre de (X'), x par z et $\frac{\Delta^q y}{\Delta x^q}$ par $\frac{d^q \theta(z)}{dz^q}$; j'ai ainsi

$$(\mathrm{C}) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{F}(z) = \mathrm{A}(z) + \mathrm{A}_0(z) \cdot \theta(z) + \mathrm{A}_1(z) \frac{d\theta(z)}{dz} + \mathrm{A}_2(z) \frac{d^2\theta(z)}{dz^2} + \ldots \\ + \mathrm{A}_p(z) \frac{d^p \theta(z)}{dz^p}. \end{aligned} \right.$$

Pour former la seconde, je néglige, dans le second membre de (X'), le terme $\mathrm{A}(x)$, j'y remplace x par z et $\frac{\Delta^q y}{\Delta x^q}$ par $\frac{(z-t)^{p-q}}{1.2\ldots p-q)}$, ce qui

me donne

$$(\mathrm{D})\quad \left\{\begin{aligned} f(z,t) = {} & \mathrm{A}_0(z)\frac{(z-t)^p}{1.2\ldots p} + \mathrm{A}_1(z)\frac{(z-t)^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)} + \mathrm{A}_2(z)\frac{(z-t)^{p-2}}{1.2\ldots(p-2)} + \ldots \\ & + \mathrm{A}_{p-1}(z)\frac{(z-t)}{1} + \mathrm{A}_p(z). \end{aligned}\right.$$

On remarquera, comme conséquence des hypothèses faites sur les coefficients de l'équation (X′) (n° **2**), que ces deux fonctions n'auront que des valeurs finies.

Ceci posé, je multiplie les deux membres de l'équation (B) par $\mathrm{A}_q(z_m)$, ce qui me donne

$$\mathrm{A}_q(z_m)\frac{\Delta^q y_m}{\Delta z^q}$$

$$= \mathrm{A}_q(z_m)\left[\frac{d^q\theta(z)}{dz^q}\right]_m + \varepsilon + \sum_{t_i=z_1}^{t_i=z_m}\left[\mathrm{A}_q(z_m)\frac{(z_m-t_i)^{p-q}}{1.2\ldots(p-q)} + \varepsilon\right]\frac{\Delta^{p+1}y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}}\Delta z,$$

car $\mathrm{A}_q(z_m)$ étant finie, tous les produits $\mathrm{A}_q(z_m).\varepsilon$ ont pu être remplacés par ε.

Je remplace successivement dans l'équation précédente q par 0, 1, 2,..., p, j'ajoute membre à membre les résultats et l'identité

$$\mathrm{A}(z_m) = \mathrm{A}(z_m);$$

et, en ayant égard aux équations (X′), (C) et (D), je trouve, après réduction, l'équation suivante

$$(6)\qquad \frac{\Delta^{p+1}y_m}{\Delta z^{p+1}} = \mathrm{F}(z_m) + \varepsilon + \sum_{t_i=z_1}^{t_i=z_m}\left[f(z_m,t_i) + \varepsilon\right]\frac{\Delta^{p+1}y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}}\Delta z,$$

d'où je pourrai déduire, en y remplaçant m par 0, 1, 2,..., n, $n+1$ équations contenant les $n+1$ rapports $\frac{\Delta^{p+1}y_0}{\Delta z^{p+1}}, \frac{\Delta^{p+1}y_1}{\Delta z^{p+1}}, \ldots, \frac{\Delta^p y_n}{\Delta z^{p+1}}$. L'élimination, entre ces équations, des n premiers de ces rapports me fournira une valeur du dernier que je pourrai substituer à l'équation (X′), car $z_n = x$ et $y_n = y$.

7. Pour faciliter cette élimination que je ne ferai que partiellement,

et surtout pour faciliter la recherche de ce que le résultat devient à la limite, je me servirai des fonctions définies par les équations suivantes, où la notation $[G(x, a)]_{a=b}$ exprime que b doit être substituée à a dans $G(x, a)$:

$$(E)\quad \begin{cases} f_0(x, z) = f(x, z), \\ f_1(x, z) = \left[\int_z^x f_0(x, z) f(z, t)\, dz\right]_{t=z}, \\ f_2(x, z) = \left[\int_z^x f_1(x, z) f(z, t)\, dz\right]_{t=z}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ f_{q+1}(x, z) = \left[\int_z^x f_q(x, z) f(z, t)\, dz\right]_{t=z}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Ces fonctions satisfont aux deux équations suivantes, où r et s désignent deux entiers positifs ou négatifs, mais finis, et z_i une valeur fixe de z,

$$(7)\quad \sum_{z_m=x_0}^{z_m=x+r\Delta z} [F(z_m) + \varepsilon][f_q(x, z_m) + \varepsilon]\,\Delta z = \varepsilon + \int_{x_0}^{x} F(z) f_q(x, z)\, dz,$$

$$(8)\quad \left\{ \sum_{z_m=z_i}^{z_m=x+r\Delta z} [f(z_m, t_i)+\varepsilon][f_q(x, z_m)+\varepsilon]\Delta z \right\}_{t_i=z_i} = \varepsilon + f_{q+1}(x, z_i + s\Delta z).$$

Pour démontrer que ces équations sont toujours vraies, je ferai remarquer d'abord que, puisque $f(z, t)$ est finie quels que soient z et t, si de plus $f_q(x, z)$ l'est aussi, les éléments de l'intégrale

$$\int_z^x f_q(x, z) f(z, t)\, dz$$

seront tous infiniment petits quels que soient z et t, et par suite $f_{q+1}(x, z)$ sera finie et continue; or $f_0(x, z)$ est finie, donc les fonctions $f_0, f_1, f_2, \dots$, sont finies, et, à partir de la seconde, elles sont continues.

Ce point fixé, et comme $F(z_m)$ est finie, on voit que les premiers

membres des équations (7) et (8) peuvent s'écrire

$$\varepsilon + \int_{x_0}^{x+rdz} \mathrm{F}(z) f_q(x, z)\, dz \quad \text{et} \quad \left[\varepsilon + \int_{z_i}^{x+rdz} f(z, t_i) f_q(x, z)\, dz\right]_{t_i = z_i},$$

et, en retranchant de chaque intégrale un nombre fini r d'éléments infiniment petits, ces premiers membres auront pour expressions

$$\varepsilon + \int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(z) f_q(x, z)\, dz \quad \text{et} \quad \varepsilon + f_{q+1}(x, z_i).$$

L'équation (7) est donc démontrée. Pour achever de démontrer l'équation (8), il suffit de faire remarquer que la différence

$$f_{q+1}(x, z + s\Delta z) - f_{q+1}(x, z)$$

est infiniment petite, puisque s est un nombre fini et $f_{q+1}(x, z)$ une fonction continue de z.

Les équations (7) et (8) vont me suffire pour faire l'élimination que j'ai en vue, mais, dans le chapitre suivant, je reviendrai sur les fonctions définies par les équations (E).

8. Lorsqu'on remplace m par n dans l'équation (6) elle devient

$$\frac{\Delta^{p+1} y_n}{\Delta z^{p+1}} = \mathrm{F}(z_n) + \varepsilon + \sum_{t_i = z_1}^{t_i = z_n} [f(z_n, t_i) + \varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}} \Delta z;$$

mais on a $y_n = y$, $\Delta z = \Delta x$, $z_0 = x_0$, $z_n = x$ et $t_i = z_i$; et, comme $f(z, t)$ est une fonction entière de t, on peut substituer $f(x, z_{i-1}) + \varepsilon$ à $f(z_n, t_i)$; en faisant ces changements dans l'équation précédente, et en ayant égard à la première des équations (E), on trouvera

$$\frac{\Delta^{p+1} y}{\Delta x^{p+1}} = \mathrm{F}(x) + \varepsilon + \sum_{z_{i-1} = x_0}^{z_{i-1} = x - \Delta z} [f_0(x, z_{i-1}) + \varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}} \Delta z;$$

et cette dernière équation deviendra, en remplaçant $i - 1$ par m,

$$(9) \qquad \frac{\Delta^{p+1} y}{\Delta x^{p+1}} = \mathrm{F}(x) + \varepsilon + \sum_{z_m = x_0}^{z_m = x - \Delta z} [f_0(x, z_m) + \varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}} \Delta z.$$

Je multiplie les deux membres de l'équation (6) par $[f_0(x, z_m)+\varepsilon]\Delta z$; j'ai ainsi

$$[f_0(x, z_m)+\varepsilon]\frac{\Delta^{p+1}y_m}{\Delta z^{p+1}}\Delta z = [F(z_m)+\varepsilon][f_0(x, z_m)+\varepsilon]\Delta z$$
$$+\sum_{t_i=z_1}^{t_i=z_m}[f(z_m, t_i)+\varepsilon][f_0(x, z_m)+\varepsilon]\Delta z\frac{\Delta^{p+1}y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}}\Delta z.$$

En remplaçant dans cette dernière équation m par $0, 1, 2, \ldots, n-1$, et en ajoutant les résultats membre à membre, la somme des premiers membres sera

$$\sum_{z_m=x_0}^{z_m=x-\Delta z}[f_0(x, z_m)+\varepsilon]\frac{\Delta^{p+1}y_m}{\Delta z^{p+1}}\Delta z;$$

la somme des termes, placés dans les seconds membres en dehors des signes $\sum$, aura pour expression

$$\sum_{z_m=x_0}^{z_m=x-\Delta z}[F(z_m)+\varepsilon][f_0(x, z_m)+\varepsilon]\Delta z,$$

ou, en vertu de l'équation (7),

$$\varepsilon+\int_{x_0}^{x}F(z)f_0(x, z)\,dz;$$

enfin le coefficient de $\frac{\Delta^{p+1}y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}}\Delta z$ aura pour valeur

$$\sum_{z_m=z_1}^{z_m=x-\Delta z}[f(z_m, t_i)+\varepsilon][f_0(x, z_m)+\varepsilon]\Delta z,$$

ou, en vertu de l'équation (8),

$$\varepsilon+f_1(x, z_{i-1}).$$

Le résultat de tout ce calcul sera donc

$$\sum_{z_m=x_0}^{z_m=x-\Delta z} [f_0(x, z_m)+\varepsilon]\frac{\Delta^{p+1}y_m}{\Delta z^{p+1}}\Delta z$$

$$=\int_{x_0}^{x} F(z)f_0(x, z)\,dz+\varepsilon+\sum_{z_{i-1}=x_0}^{z_{i-1}=x-2\Delta z} [f_1(x, z_{i-1})+\varepsilon]\frac{\Delta^{p+1}y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}}\Delta z.$$

En ayant égard à cette équation, et en y remplaçant $i-1$ par m, l'équation (9) deviendra

$$(10)\quad \frac{\Delta^{p+1}y}{\Delta z^{p+1}}=F(x)+\varepsilon+\int_{x_0}^{x} F(z)f_0(x, z)dz+\varepsilon+\sum_{z_m=x_0}^{z_m=x-2\Delta z} [f_1(x, z_m)+\varepsilon]\frac{\Delta^{p+1}y_m}{\Delta z^{p+1}}\Delta z$$

Je reprends l'équation (8) et je multiplie ses deux membres par

$$[f_1(x, z_m)+\varepsilon]\Delta z,$$

ce qui me donne

$$[f_1(x, z_m)+\varepsilon]\frac{\Delta^{p+1}y_m}{\Delta z^{p+1}}\Delta z=[F(z_m)+\varepsilon][f_1(x, z_m)+\varepsilon]\Delta z$$

$$+\sum_{t_i=z_1}^{t_i=z_m}[f(z_m, t_i)+\varepsilon][f_1(x, z_m)+\varepsilon]\Delta z\frac{\Delta^{p+1}y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}}\Delta z.$$

En remplaçant dans cette équation m par $0, 1, 2, \ldots, n-2$, et en ajoutant les résultats, on verra que la somme des premiers membres, celle des termes placés dans les seconds membres en dehors des signes $\sum$, et le coefficient de $\frac{\Delta^{p+1}y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}}\Delta z$, ont respectivement pour expressions

$$\sum_{z_m=x_0}^{z_m=x-2\Delta z} [f_1(x, z_m)+\varepsilon]\frac{\Delta^{p+1}y_m}{\Delta z^{p+1}}\Delta z,$$

$$\sum_{z_m=x_0}^{z_m=x-2\Delta z} [F(z_m)+\varepsilon][f_1(x, z_m)+\varepsilon]\Delta z,$$

$$\sum_{z_m=z_1}^{z_m=x-2\Delta z} [f(z_m, t_i)+\varepsilon][f_1(x, z_m)+\varepsilon]\Delta z,$$

et ces deux dernières pourront être remplacées, en vertu des équations (7) et (8), par

$$\varepsilon + \int_{x_0}^{x} F(z) f_1(x, z)\, dz \quad \text{et} \quad \varepsilon + f_2(x, z_{i-1});$$

ce nouveau calcul conduira donc à l'équation

$$\sum_{z_m = x_0}^{z_m = x - 2\Delta z} [f_1(x, z_m) + \varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}} \Delta z$$
$$= \int_{x_0}^{x} F(z) f_1(x, z)\, dz + \varepsilon + \sum_{z_{i-1} = x_0}^{z_{i-1} = x - 3\Delta z} [f_2(x, z_{i-1}) + \varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}} \Delta z;$$

et celle-ci, après substitution de m à $i-1$, permettra de remplacer l'équation (10) par la suivante

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta^{p+1} y}{\Delta x^{p+1}} &= F(x) + \varepsilon + \int_{x_0}^{x} F(z) f_0(x, z)\, dz + \varepsilon \\ &+ \int_{x_0}^{x} F(z) f_1(x, z) dz + \varepsilon + \sum_{z_m = x_0}^{z_m = x - 3\Delta z} [f_2(x, z_m) + \varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}} \Delta z. \end{aligned} \right.$$

Les raisonnements et les calculs qui m'ont conduit de l'équation (9) à l'équation (10), et de celle-ci à l'équation (11), peuvent être répétés autant de fois qu'on voudra; par analogie on peut donc poser

$$(F) \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta^{p+1} y}{\Delta x^{p+1}} &= F(x) + \varepsilon + \int_{x_0}^{x} F(z) f_0(x, z)\, dz + \varepsilon \\ &+ \int_{x_0}^{x} F(z) f_1(x, z) + \varepsilon + \int_{x_0}^{x} F(z) f_2(x, z)\, dz + \varepsilon + \ldots \\ &+ \int_{x_0}^{x} F(z) f_{q-1}(x, z) dz + \varepsilon + \sum_{z_m = x_0}^{z_m = x - (q+1)\Delta z} [f_q(x, z_m) + \varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}} \Delta z. \end{aligned} \right.$$

Il est d'ailleurs aisé de démontrer en toute rigueur que cette équation est toujours vraie.

D'abord, quand on y pose $q = 2$, elle coïncide avec l'équation (11); pour prouver que l'équation (F) est générale, il suffit donc d'établir que si elle est vraie pour une valeur de q, elle l'est encore pour la valeur suivante.

A cet effet, on multipliera les deux membres de l'équation (6) par $[f_q(x, z_m) + \varepsilon]\Delta z$; on aura ainsi une nouvelle équation où l'on remplacera successivement m par $0, 1, 2, \ldots, n - q - 1$. On additionnera les résultats; la somme des premiers membres sera

$$\sum_{z_m = x_0}^{z_m = x - (q+1)\Delta z} [f_q(x, z_m) + \varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}} \Delta z,$$

et des raisonnements semblables à ceux que j'ai déjà faits deux fois montreront que, à l'aide des équations (7) et (8), la somme des seconds membres peut s'écrire

$$\int_{x_0}^{x} F(z) f_q(x, z)\, dz + \varepsilon + \sum_{z_m = x_0}^{z_m = x - (q+2)\Delta z} [f_{q+1}(x, z_m) + \varepsilon] \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}} \Delta z;$$

or la substitution, dans l'équation (F), de cette dernière expression à la précédente, fournit le même résultat que la substitution, dans la même équation, de $q + 1$ à q : donc l'équation (F) est générale.

CHAPITRE III.

Intégration de l'équation (X).

9. Je viens de prouver que les équations (F) et (X′) sont équivalentes quelle que soit la constante Δx; l'équation différentielle

$$(\mathrm{X}) \quad \frac{d^{p+1} y}{dx^{p+1}} = A(x) + A_0(x) y + A_1(x) \frac{dy}{dx} + A_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots + A_p(x) \frac{d^p y}{dx^p}$$

est donc équivalente à ce que devient l'équation (F) lorsqu'on y pose $\Delta x = 0$, car, à cette limite, l'équation (X′) se confond avec l'équation (X).

Je vais montrer que, à la limite, le second membre de l'équation (F) peut être remplacé par une série convergente. Ma démonstration sera fondée sur deux lemmes, savoir :

1° Les fonctions définies par les équations (E) sont les termes d'une série convergente;

2° Toutes les valeurs du rapport $\frac{\Delta^{p+1} y}{\Delta z^{p+1}}$ sont finies.

10. 1° Si l'on suppose, pour plus de clarté, que u et v sont les coordonnées rectangulaires d'un point du plan, chaque valeur de la variable de la forme $u + v\sqrt{-1}$ sera représentée par un point, et la droite joignant deux de ces points sera le module de la différence des valeurs qu'ils représentent. En conséquence, en désignant par s l'arc commençant au point fixe x, se terminant au point variable z, et le long duquel toutes les intégrales sont prises, on aura

$$\text{mod. } dz = \text{mod. } (-dz) = ds.$$

Et puisque, pour toutes les valeurs de z et de t que l'on considère, $f(z, t)$ est finie, son module ne peut surpasser un nombre fini M.

Ceci posé, je dis d'abord que, s'il existe une fonction réelle et positive de s, $G(s)$, dont les valeurs surpassent les valeurs correspondantes du module de $f_q(x, z)$, les valeurs de la fonction $M\int_0^s G(s)\,ds$ surpasseront les valeurs correspondantes du module de $f_{q+1}(x, z)$.

En effet on a, quel que soit t,

$$\text{mod. } [-f_q(x, z) f(z, t)\,dz] < MG(s)\,ds;$$

les modules des éléments de l'intégrale

$$\int_z^x f_q(x, z) f(z, t)\,dz = \int_x^z [-f_q(x, z) f(z, t)]\,dz$$

sont donc plus petits, quel que soit t, que les éléments correspondants de l'intégrale

$$\int_0^s MG(s)\,ds,$$

et comme le module d'une somme est moindre que la somme des modules de ses termes, on a

$$\text{mod.} f_{q+1}(x, z) < \mathrm{M} \int_0^s \mathrm{G}(s)\, ds.$$

En se fondant sur cette inégalité et sur ce que le module de $f_0(x, z)$ est plus petit que M, on établira sans peine que les termes de la série convergente

$$\mathrm{M} e^{\mathrm{M}s} = \mathrm{M} + \mathrm{M}\frac{\mathrm{M}s}{1} + \mathrm{M}\frac{\mathrm{M}^2 s^2}{1.2} + \ldots$$

sont respectivement plus grands que les valeurs correspondantes des modules des fonctions

$$f_0, \quad f_1, \quad f_2, \ldots.$$

On peut donc poser

$$(\mathrm{G}) \qquad \varphi(x, z) = f_0(x, z) + f_1(x, z) + f_2(x, z) + \ldots,$$

et $\varphi(x, z)$ désigne une fonction de valeur finie.

Cette conclusion est indépendante de la forme de la ligne d'intégration; elle ne suppose qu'une chose, c'est qu'en chaque point de cette ligne les coefficients de l'équation (X) ont des valeurs finies. Mais on se souvient que toujours, pour nous, la ligne d'intégration est droite.

11. 2° Je désigne par N et M_1 des nombres plus grands que les plus grands modules des valeurs, toujours finies, de

$$\mathrm{F}(z_m) + \varepsilon \quad \text{et} \quad f(z_m, t_i).$$

En posant

$$\text{mod.} \Delta z = \Delta s,$$

et en me fondant sur ce que le module d'une somme est moindre que la somme des modules de ses termes, je déduis de l'équation (6)

$$\text{mod.} \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}} < \mathrm{N} + \mathrm{M}_1 \Delta s \sum_{i-1=0}^{i-1=m-1} \text{mod.} \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}}.$$

Je vais prouver d'abord que si K est un nombre fini plus grand que le second membre de cette inégalité, $K e^{M_1 \Delta s}$ est un nombre plus grand que le second membre de l'inégalité

$$\text{mod.}\ \frac{\Delta^{p+1} y_{m+1}}{\Delta z^{p+1}} < N + M_1 \Delta s \sum_{i-1=0}^{i-1=m} \text{mod.}\ \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}}$$

qui se déduit de la première en y remplaçant m par $m+1$.

En effet, la seconde inégalité peut s'écrire

$$\text{mod.}\ \frac{\Delta^{p+1} y_{m+1}}{\Delta z^{p+1}} < \left[N + M_1 \Delta s \sum_{i-1=0}^{i-1=m-1} \text{mod.}\ \frac{\Delta^{p+1} y_{i-1}}{\Delta z^{p+1}} \right]$$
$$+ M_1 \Delta s . \left[\text{mod.}\ \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}} \right];$$

or ce second membre est moindre que

$$K(1 + M_1 \Delta s),$$

et, *à fortiori*, moindre que

$$K e^{M_1 \Delta s},$$

car $e^{M_1 \Delta s}$ est la somme d'une série à termes tous positifs, et dont les deux premiers sont

$$1 + M_1 \Delta s.$$

Il est aisé de voir maintenant que les valeurs des rapports

$$\frac{\Delta^{p+1} y_0}{\Delta z^{p+1}}, \quad \frac{\Delta^{p+1} y_1}{\Delta z^{p+1}}, \quad \frac{\Delta^{p+1} y_2}{\Delta z^{p+1}}, \ldots, \quad \frac{\Delta^{p+1} y_{n-(q+1)}}{\Delta z^{p+1}},$$

sont toutes finies. Car le module de la première étant moindre que N, on prouvera de proche en proche, à l'aide de la proposition que je viens de démontrer, que les modules de ces valeurs sont respectivement moindres que

$$N, \ N e^{M_1 \Delta s}, \ N e^{M_1 2 \Delta s}, \ldots, \ N e^{M_1 [n-(q+1)] \Delta s}$$

ou que

$$N, \ N (e^{M_1})^{s'_1}, \ N (e^{M_1})^{s'_2}, \ldots, \ N (e^{M_1})^{s'_{n-q-1}},$$

en représentant généralement par s'_r la distance du point x_0 au point z_r.

On voit, pour le dire en passant, que, s_r et s'_r désignant les distances du point intermédiaire z_r aux extrémités de la droite $x_0 x$, en représentant par S la longueur de cette droite, on a

$$s_r + s'_r = \mathrm{S}.$$

12. De l'équation (G) je déduis

$$\begin{aligned} &\mathrm{F}(x) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(z)\,\varphi(x, z)\,dz \\ &= \mathrm{F}(x) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(z)\,f_0(x, z)\,dz + \int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(z)\,f_1(x, z)\,dz + \ldots \\ &\quad + \int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(z)\,f_{q-1}(x, z)\,dz + \ldots. \end{aligned}$$

Il est évident que le second membre est une série convergente; je vais prouver que $\frac{d^{p+1} y}{dx^{p+1}}$ en est la somme.

D'abord, puisque cette série est convergente, l'équation précédente peut s'écrire

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{F}(x) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(z)\,\varphi(x, z)\,dz \\ &= \mathrm{F}(x) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(z) f(x, z)\,dz + \ldots + \int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(z)\,f_{q-1}(x, z)\,dz + c e^{\alpha\sqrt{-1}}, \end{aligned} \right.$$

c désignant un nombre positif qui, pour une valeur finie de q et pour les valeurs plus grandes, est moindre qu'un nombre donné aussi petit qu'on voudra.

Ensuite, puisque les modules des quantités

$$f_q(x, z_m) \quad \text{et} \quad \frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}}$$

sont plus petits que

$$M\frac{M^q s_m^q}{1.2\ldots q} \quad \text{et} \quad N(e^{M_1})^{s_m},$$

et, *à fortiori*, plus petits que

$$M\frac{M^q S^q}{1.2\ldots q} \quad \text{et} \quad N(e^{M_1})^{S},$$

on a, en désignant, pour abréger, par C la constante $MN(e^{M_1})^S$,

$$\text{mod.}\left[f_q(x, z_m)\frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}}\Delta z\right] < C\frac{M^q S^q}{1.2\ldots q}\Delta s.$$

En conséquence, le terme complémentaire de l'équation (F), savoir

$$\sum_{z_m = x_0}^{z_m = x-(q+1)\Delta z} [f_q(x, z_m) + \varepsilon]\frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}}\Delta z,$$

qu'on peut écrire de la manière suivante, puisque le produit $\varepsilon\frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}}\Delta z$ est un infiniment petit du second ordre,

$$\varepsilon + \sum_{z_m = x_0}^{z_m = x} f_q(x, z_m)\frac{\Delta^{p+1} y_m}{\Delta z^{p+1}}\Delta z,$$

a pour module un nombre moindre que

$$C\frac{M^q S^q}{1.2\ldots q}\sum_{z_m = x_0}^{z_m = x}\Delta s = CS\frac{M^q S^q}{1.2\ldots q}.$$

L'équation (F) peut donc prendre la forme

$$\frac{\Delta^{p+1} y}{\Delta x^{p+1}} = F(x) + \int_{x_0}^{x} F(z) f_0(x, z)\,dz + \int_{x_0}^{x} F(z) f_1(x, z)\,dz + \ldots$$
$$+ \int_{x_0}^{x} F(z) f_{q-1}(x, z)\,dz + (q+2)\varepsilon' + c' e^{\alpha'\sqrt{-1}},$$

c' désignant un nombre positif qui, pour une valeur finie de q et pour les valeurs plus grandes, est plus petit qu'un nombre donné aussi petit qu'on voudra, et ε' la moyenne des ε placés dans l'équation (F).

En retranchant la dernière équation de l'équation (12), on trouve

$$F(x) + \int_{x_0}^{x} F(z)\,\varphi(x, z)\,dz - \frac{\Delta^{p+1} y}{\Delta x^{p+1}} = ce^{\alpha\sqrt{-1}} - c'e^{\alpha'\sqrt{-1}} - (q+2)\,\varepsilon'$$

pour toutes les valeurs de Δx et de q.

Si maintenant on pose $\Delta x = 0$, on aura, pour toutes les valeurs finies de q,

$$F(x) + \int_{x_0}^{x} F(z)\,\varphi(x, z)\,dz - \frac{d^{p+1} y}{dx^{p+1}} = ce^{\alpha\sqrt{-1}} - c'e^{\alpha'\sqrt{-1}}.$$

Le second membre de cette équation est identiquement nul, puisque c et c' sont plus petits que des nombres donnés quelconques pour des valeurs finies de q. On a donc finalement

$$\text{(H)} \qquad \frac{d^{p+1} y}{dx^{p+1}} = F(x) + \int_{x_0}^{x} F(z)\,\varphi(x, z)\,dz.$$

13. En intégrant les deux membres de l'équation (H) de x_0 à x, et en se souvenant que a_p est la valeur initiale de $\frac{d^p y}{dx^p}$, on trouve

$$\frac{d^p y}{dx^p} = a_p + \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} F(z)\,\varphi(x, z)\,dz.$$

Une nouvelle intégration introduirait la constante a_{p-1} et donnerait

$$\frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}} = a_{p-1} + a_p \frac{x - x_0}{1} + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$$
$$+ \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} F(z)\,\varphi(x, z)\,dz.$$

Enfin, en représentant par $\psi_0(x)$ et par $\Psi(x)$ les résultats obtenus en

intégrant $p+1$ fois, et chaque fois de x_0 à x,

$$F(x) \quad \text{et} \quad \int_{x_0}^{x} F(z)\,\varphi(x, z)\,dz,$$

la valeur de y s'écrira, en ayant égard à l'équation (A),

$$\text{(J)} \qquad y = \theta(x) + \psi_0(x) + \Psi(x).$$

Si l'on voulait cette valeur développée en série convergente, on intégrerait $(p+1)$ fois, et chaque fois de x_0 à x, les quantités

$$F(x), \quad \int_{x_0}^{x} F(z) f_0(x, z)\,dz, \quad \int_{x_0}^{x} F(z) f_1(x, z)\,dz, \ldots,$$

et, en représentant les résultats par

$$\psi_0(x), \ \psi_1(x), \ \psi_2(x), \ldots,$$

on aurait, en vertu de l'équation (12),

$$\text{(J')} \qquad y = \theta(x) + \psi_0(x) + \psi_1(x) + \psi_2(x) + \ldots.$$

14. Les équations (H) et (J) font voir qu'une fonction est déterminée lorsqu'elle est assujettie à satisfaire à une équation linéaire donnée de l'ordre $p+1$, et lorsqu'on connaît sa valeur et celles de ses p premières dérivées pour une valeur donnée de la variable indépendante. Les mêmes équations montrent encore que le calcul de cette fonction se réduit à $p+2$ quadratures [ou à deux seulement si l'on fait usage de l'équation (4)], dès qu'on connaît les deux fonctions auxiliaires $\varphi(x, z)$ et $F(x)$.

S'il y avait quelque utilité à imposer des noms à ces dernières, je nommerais l'une, $\varphi(x, z)$, la *fonction générique*, et l'autre, $F(x)$, la *fonction individuelle*.

Ces dénominations sont faciles à justifier. Toutes les fonctions qui satisfont à l'équation (X), en y considérant $A(x)$ comme une fonction arbitraire, et les coefficients de y et de ses dérivées comme des fonctions données, peuvent composer un genre caractérisé par le système

de ces coefficients; et ce qui distingue chaque fonction de ce genre des autres fonctions du même genre, ce sont le terme $A(x)$ de l'équation différentielle particulière à laquelle elle satisfait, et le système de sa valeur initiale a_0 et des valeurs initiales $a_1, a_2, \ldots, a_p$ de ses p premières dérivées. Or les équations (H) et (J) montrent que toute solution y d'une équation linéaire est, si l'on peut parler ainsi, le résultat de la combinaison par voie de quadratures de deux fonctions, savoir :

La fonction $\varphi(x, z)$ qui, ne contenant ni constantes arbitraires ni le terme $A(x)$, est déterminée par le système des coefficients caractérisant le genre auquel appartient y;

La fonction $F(x)$, qui contient $A(x)$, la valeur initiale de la variable et les valeurs initiales de y et de ses p premières dérivées, en un mot tout ce qui individualise la fonction y.

Les fonctions composant un même genre pourraient être groupées en espèces, caractérisées chacune par le terme $A(x)$ de $F(x)$. Les fonctions appartenant à une même espèce satisferaient à une même équation différentielle particulière, elles ne seraient donc que les solutions renfermées dans l'intégrale générale de cette équation. Cette intégrale générale est fournie par l'équation (J), en y considérant $a_0, a_1, \ldots, a_p$ comme des indéterminées; $F(x)$, qui est alors une fonction de $p+2$ variables indépendantes $x, a_0, a_1, \ldots$, pourrait être nommée dans ce cas la *fonction spécifique*.

Quoi qu'il en soit de l'utilité et de la convenance de ces dénominations, je n'en ferai pas usage.

$F(z)$ s'obtient sans calcul et de la manière la plus simple au moyen de l'équation (C); les équations (E) font connaître les termes de la série dont $\varphi(x, z)$ est la somme; le calcul sera, en général, très-laborieux. Avant de clore ce chapitre je vais donner une nouvelle définition de $\varphi(x, z)$ qui peut, dans quelques cas, en abréger la recherche.

15. Ce qui me reste à dire est fondé en partie sur la transformation suivante.

Si l'on a

$$u = \left[\int_z^x M(x, z, t)\, dz\right]_{t=z},$$

je dis qu'on pourra toujours poser

$$(13)\qquad \frac{du}{dz} = -\mathrm{M}(x, z, z) + \left[\int_z^x \frac{d\mathrm{M}(x, z, t)}{dt}\, dz\right]_{t=z}.$$

En désignant par $\mathrm{N}(x, z, t)$ l'intégrale générale de la différentielle $\mathrm{M}(x, z. t)\, dz$, on aura

$$\int_z^x \mathrm{M}(x, z, t)\, dz = \mathrm{N}(x, x, t) - \mathrm{N}(x, z, t).$$

et par suite

$$u = \mathrm{N}(x, x, z) - \mathrm{N}(x, z, z);$$

donc

$$\frac{du}{dz} = \left\{\left[\frac{d\mathrm{N}(x, z, t)}{dt}\right]_{z=x} - \left[\frac{d\mathrm{N}(x, z, t)}{dt}\right]_{z=z} - \left[\frac{d\mathrm{N}(x, z, t)}{dz}\right]_{z=z}\right\}_{t=z};$$

or

$$\left[\frac{d\mathrm{N}(x, z, t)}{dt}\right]_{z=x} - \left[\frac{d\mathrm{N}(x, z, t)}{dt}\right]_{z=z} = \int_z^x \frac{d\mathrm{M}(x, z, t)}{dt}\, dz,$$

et

$$\left[\frac{d\mathrm{N}(x, z, t)}{dz}\right]_{z=z} = \mathrm{M}(x, z, t);$$

donc enfin

$$\frac{du}{dz} = -\mathrm{M}(x, z, z) + \left[\int_z^x \frac{d\mathrm{M}(x, z, t)}{dt}\, dz\right]_{t=z};$$

et la formule (13) est démontrée.

On démontrerait de même la formule suivante

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{M}(x, x, z) + \left[\int_z^x \frac{d\mathrm{M}(x, z, t)}{dx}\, dx\right]_{t=z}.$$

16. La fonction $\varphi(x, z)$ a été définie par la série convergente dont elle est la somme; je vais montrer qu'elle satisfait à un système d'équations faciles à déduire de l'équation (X).

J'ajoute les équations (E), et, en ayant égard à l'équation (G), je

trouve

$$\varphi(x, z) = f(x, z) + \left[\int_z^x \varphi(x, z) f(z, t)\, dz\right]_{t=z}.$$

Par suite, et en faisant usage de la formule (13),

$$\frac{d\varphi(x, z)}{dz} = \frac{df(x, z)}{dz} - \varphi(x, z) f(z, z) + \left[\int_z^x \varphi(x, z) \frac{df(z, t)}{dt}\, dz\right]_{t=z};$$

mais l'équation (D) me donne

$$f(z, z) = A_p(z),$$

donc

$$\frac{d\varphi(x, z)}{dz} + A_p(z)\varphi(x, z) = \frac{df(x, z)}{dz} + \left[\int_z^x \varphi(x, z) \frac{df(z, t)}{dt}\, dz\right]_{t=z}.$$

Un calcul semblable au précédent donnera

$$\frac{d^2\varphi(x, z)}{dz^2} + \frac{d A_p(z)\varphi(x, z)}{dz} - A_{p-1}(z)\varphi(x, z)$$
$$= \frac{d^2 f(x, z)}{dz^2} + \left[\int_z^x \varphi(x, z) \frac{d^2 f(z, t)}{dt^2}\, dz\right]_{t=z};$$

et de proche en proche on sera conduit, quel que soit k, à l'équation

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^k\varphi}{dz^k} + \frac{d^{k-1}A_p\varphi}{dz^{k-1}} - \frac{d^{k-2}A_{p-1}\varphi}{dz^{k-2}} + \ldots + (-1)^{k-1} A_{p-k+1}\varphi \\ &= \frac{d^k f(x, z)}{dz^k} + \left[\int_z^x \varphi(x, z) \frac{d^k f(z, t)}{dt^k}\, dz\right]_{t=z}. \end{aligned}\right.$$

Lorsqu'on pose $z = x$, le second membre de cette équation se réduit évidemment à $\left[\frac{d^k f(x, z)}{dz^k}\right]_{z=x}$, ou, comme le montre l'équation (D), à $A_{p-k}(x)$; on a donc encore

$$(15)\quad \left[\frac{d\varphi}{dz^k} + \frac{d^{k-1}A_p\varphi}{dz^{k-1}} - \frac{d^{k-2}A_{p-1}\varphi}{dz^{k-2}} + \ldots + (-1)^{k-1} A_{p-k+1}\varphi\right]_{z=x} = A_{p-k}(x).$$

Comme $f(z, t)$ est une fonction entière et du degré p par rapport

à t,

$$\frac{d^{p+1}f(z,t)}{dt^{p+1}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^{p+1}f(x,z)}{dz^{p+1}} = 0;$$

en conséquence, l'équation (14) devient, quand on y pose $k = p+1$,

$$(16) \quad \frac{d^{p+1}\varphi}{dz^{p+1}} + \frac{d^p A_p \varphi}{dz^p} - \frac{d^{p-1}A_{p-1}\varphi}{dz^{p-1}} + \frac{d^{p-2}A_{p-2}\varphi}{dz^{p-2}} - \ldots + (-1)^p A_0 \varphi = 0.$$

Ainsi la fonction $\varphi(x, z)$ est, à l'égard de z, une des solutions de l'équation (16). Pour achever de la définir, on déterminera les $p+1$ quantités arbitraires indépendantes de z qui figurent dans l'intégrale générale de l'équation (16), en assujettissant cette intégrale générale à satisfaire aux $p+1$ équations obtenues en posant successivement dans l'équation (15) $k = 0$, $k = 1$, $k = 2, \ldots, k = p$.

17. L'équation (16) est, comme l'équation (X), linéaire et de l'ordre $p+1$, et sa résolution présentera, en général, les mêmes difficultés; dans certains cas cependant la résolution de la première sera plus facile que celle de la seconde; c'est ce qui arriverait, par exemple, si l'équation (16) développée ne contenait pas de terme en φ. On pourrait donc se proposer de déduire une troisième équation de l'équation (16), comme celle-ci a été déduite de (X), puis de cette troisième d'en déduire une quatrième, et ainsi de suite, dans l'espérance de rencontrer une équation différentielle facile à résoudre, et dont l'intégrale générale conduirait, en remontant et de proche en proche, à l'intégrale demandée.

Cette espérance serait vaine, car je vais prouver qu'en opérant sur l'équation (16), comme on l'a fait sur l'équation (X), on retrouve celle-ci privée seulement du terme $A(x)$.

La comparaison des deux équations (X) et (16) montre que l'on obtient la seconde lorsque, après suppression de $A(x)$, on remplace dans l'équation (X) $-A_{p-k}\frac{d^{p-k}v}{dx^{p-k}}$ par $+(-1)^k \frac{d^{p-k}A_{p-k}\varphi}{dz^{p-k}}$; et on sait que le développement de cette dernière quantité est le même que celui de

$$(17) \qquad +(-1)^k \varphi \left(\frac{d}{dz} + A_{p-k}\right)^{p-k},$$

en considérant, dans ce dernier, les exposants comme des indices de dérivées, et en y remplaçant $\frac{d^{p-k}\varphi}{dz^{p-k}}$ par $A_{p-k}\frac{d^{p-k}\varphi}{dz^{p-k}}$.

Si, dans l'équation (16) ainsi obtenue, on fait les mêmes changements, en substituant x et y à z et φ, le développement de l'expression (17) sera remplacé par celui de

$$(18)\qquad -y\left[\left(\frac{d}{dx}+A_{p-k}\right)-A_{p-k}\right]^{p-k},$$

et l'équation (X) sera reproduite.

En effet, le terme général de l'expression (17), savoir :

$$+(-1)^k C_i A^i_{p-k}\frac{d^{p-k-i}\varphi}{dz^{p-k-i}},$$

deviendra

$$-(-1)^{2k+i} C_i\, y\left[\frac{d}{dx}+(A^i_{p-k})\right]^{p-k-i},$$

et cette quantité peut être représentée symboliquement par le terme général de l'expression (18), savoir :

$$-(-1)^i C_i\, y\left(\frac{d}{dx}+A_{p-k}\right)^{p-k-i} A^i_{p-k},$$

puisque les symboles $(A^i_{p-k})^r$ et $A^r_{p-k}.A^i_{p-k}$ représentent tous deux

$$\frac{d^{i+r}A_{p-k}}{dz^{i+r}}.$$

CHAPITRE IV.

Intégration des équations linéaires du premier ordre et des équations linéaires à coefficients constants.

18. Lorsque $p=0$, les équations (X) et (D) se réduisent à

$$(19)\qquad \frac{dy}{dx}=A(x)+yA_0(x),$$

$$f(z,t)=A_0(z);$$

et en posant

$$A_0(z)\,dz = dP(z),$$

les valeurs de

$$f_0(x, z),\quad f_1(x, z),\quad f_2(x, z), \ldots,$$

fournies par les équations (E), seront

$$A_0(x),\quad A_0(x)[P(x) - P(z)],\quad A_0(x)\frac{[P(x) - P(z)]^2}{1.2}, \ldots;$$

l'équation (G) devient donc

$$\varphi(x, z) = A_0(x)\,e^{P(x)}.\,e^{-P(z)}.$$

Dans le même cas, les équations (A) et (C) se réduisent à

$$\theta(z) = a_0,$$

$$F(z) = A(z) + a_0 A_0(z),$$

et l'équation (H) à

$$(20)\quad \frac{dy}{dx} = A(x) + a_0 A_0(x) + A_0(x)e^{P(x)}\int_{x_0}^{x} e^{-P(z)}[A(z) + a_0 A_0(z)]\,dz.$$

En posant

$$A(z)\,e^{-P(z)}\,dz = dR(z)$$

et par suite

$$A(x) = e^{P(x)}\frac{d[R(x) - R(x_0)]}{dx},$$

puis en remarquant que de la valeur de $dP(z)$ on déduit

$$e^{-P(z)}A_0(z)\,dz = -\,de^{-P(x)}$$

et

$$A_0(x) = \frac{dP(x)}{dx},$$

l'équation (20) prendra successivement les formes suivantes

$$\frac{dy}{dx} = A(x) + A_0(x)\, e^{P(x)}[R(x) - R(x_0)] + a_0 A_0(x)\, e^{P(x)} . e^{-P(x_0)}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[R(x) - R(x_0)]}{dx} e^{P(x)} + \frac{de^{P(x)}}{dx}[R(x) - R(x_0)] + a_0 e^{-P(x_0)} A_0(x) e^{P(x)}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\{e^{P(x)}[R(x) - R(x_0)]\}}{dx} + a_0 e^{-P(x_0)} \frac{de^{P(x)}}{dx}.$$

L'équation (J) donne donc

$$(21)\quad y = a_0 + \int_{x_0}^{x} d\{e^{P(x)}[R(x) - R(x_0)]\} + a_0 e^{-P(x_0)} \int_{x_0}^{x} de^{P(x)}.$$

En effectuant les intégrations et en remplaçant $P(x)$ et $R(x) - R(x_0)$ par leurs valeurs, l'équation (21) fournit le résultat connu

$$y = e^{\int A_0(x)dx}\left[a_0 e^{-P(x_0)} + \int_{x_0}^{x} A(x)\, e^{-\int A_0(x)dx} dx\right].$$

19. Avant de passer à l'intégration des équations linéaires à coefficients constants, je vais définir une notation qui simplifie l'expression et qui facilite le calcul de certaines quantités se présentant sous la forme d'intégrales définies.

Lorsqu'un polynôme entier à coefficients constants

$$A_0 \frac{x^m}{1.2\ldots m} + A_1 \frac{x^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} + A_2 \frac{x^{m-2}}{1.2\ldots m-2} + \ldots$$
$$+ A_{m-2} \frac{x^2}{1.2} + A_{m-1} \frac{x}{1} + A_m$$

se déduira d'un second polynôme

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-2} x^2 + A_{m-1} x + A_m,$$

en divisant chaque terme de celui-ci par le produit de tous les nombres entiers n'excédant pas le degré de ce terme, je désignerai le premier

de ces polynômes par $\Gamma f(x))$ ou par $f\Gamma x)$, lorsque le second sera désigné par $f(x)$.

En conséquence, j'écrirai

$$(22) \qquad \int f\Gamma x)\,dx = \Gamma x f(x)] + \text{const.}$$

Soient deux polynômes entiers et à coefficients constants

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$
$$F(y) = B_0 y^p + B_1 y^{p-1} + \ldots + B_{p-1} y + B_p;$$

si, en désignant par a une constante, on a entre les deux variables x et y la relation

$$x + y = a,$$

on en déduira

$$(23) \qquad \frac{d^k F\Gamma y)}{dx^k} = (-1)^k \frac{d^k F\Gamma y)}{dy^k},$$

et l'intégrale générale

$$\int F\Gamma y)\, f\Gamma x)\,dx$$

aura pour expression

$$\Gamma x f(x)) - F\Gamma y) + \Gamma x^2 f(x)) \frac{dF\Gamma y)}{dy} + \Gamma x^3 f(x)) \frac{d^2 F\Gamma y)}{dy^2} + \ldots$$
$$+ \Gamma x^{p+1} f(x)) \frac{d^{p+1} F\Gamma y)}{dy^{p+1}} + \text{const.},$$

comme on le verra en intégrant par parties et en ayant égard aux équations (22) et (23).

Pour $x = 0$, cette valeur se réduit à la constante, et puisque pour $x = a$, $y = 0$, $F\Gamma y)$ et ses dérivées se réduisent aux coefficients de $F(y)$, l'intégrale définie

$$\int_0^a F\Gamma y)\, f\Gamma x)\,dx$$

a donc pour valeur

$$\Gamma a F(a)) B_p + \Gamma a^2 f(a)) B_{p-1} + \ldots + \Gamma a^p f(a)) B_1 + \Gamma a^{p+1} f(a)) B_0$$

ou, comme les coefficients de $F(y)$ sont constants,

$$\Gamma a B_0 a^p f(a) + a B_1 a^{p-1} f(a) + \ldots + a B_{p-1} a f(a) + a B_p f(a)),$$

et l'on est conduit ainsi à l'égalité

$$(24) \qquad \int_0^a F\Gamma y) f\Gamma x) dx = \Gamma a F(a) f(a)).$$

20. Lorsque les coefficients $A_0(x)$, $A_1(x)$,..., $A_p(x)$ sont des constantes, que je désignerai par A_0, A_1,..., A_p, l'équation (X) a la forme suivante

$$(25) \qquad \frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = A(x) + A_0 y + A_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + A_p \frac{d^p y}{dx^p};$$

et si l'on pose

$$z - t = u, \quad x - z = v, \quad x - t = v',$$

puis

$$P(u) = A_0 u^p + A_1 u^{p-1} + A_2 u^{p-2} + \ldots + A_{p-1} u + A_p,$$

l'équation (D) s'écrira

$$f(z, t) = P\Gamma u),$$

et l'on aura d'abord, conformément à la première des équations (E),

$$f_0(x, z) = P\Gamma v).$$

La seconde des équations (E) peut évidemment s'écrire

$$f_1(x, z) = \left[\int_t^x f_0(x, z) f(z, t) dz \right]_{t=z};$$

mais on a, en faisant usage de l'équation (24),

$$\int_t^x f_0(x, z) f(z, t)\, dz = \int_0^{v'} \mathrm{P}\Gamma v) \mathrm{P}\Gamma u)\, du = \Gamma v' \mathrm{P}(v')^2).$$

et comme, par le changement de t en z, v' se change en v,

$$f_1(x, z) = \Gamma v \mathrm{P}(v)^2).$$

Pareillement, la troisième des équations (E) étant mise sous la forme

$$f_2(x, z) = \left[\int_t^x f_1(x, z) f(z, t)\, dz\right]_{t=z},$$

on pourra remplacer la quantité placée entre les crochets par $\Gamma v'^2 \mathrm{P}(v')^3$, et le changement de t en z conduisant à celui de v' en v, on aura

$$f_2(x, z) = \Gamma v^2 \mathrm{P}(v)^3].$$

L'analogie conduit donc à poser, quel que soit q,

$$f_q(x, z) = \Gamma v^q \mathrm{P}(v)^{q+1}],$$

et la démonstration rigoureuse de cette formule ne présente aucune difficulté.

En portant ces valeurs de $f_0(x, z)$, $f_1(x, z)$, $f_2(x_1, z)$, etc., dans l'équation (G), elle devient

$$(26) \qquad \varphi(x, z) = \Gamma \mathrm{P}(v) + v \mathrm{P}(v)^2 + v^2 \mathrm{P}(v)^3 + \ldots].$$

21. La fonction $\varphi(x, z)$ est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de v; on trouvera le terme général de cette série en calculant le terme en v^q de la progression géométrique

$$(27) \qquad \mathrm{P}(v) + v \mathrm{P}(v)^2 + v^2 \mathrm{P}(v)^3 + \ldots,$$

et en le divisant par le produit $1.2.3\ldots q$.

Or cette progression peut s'écrire, en remplaçant ses $q+1$ premiers termes par leur somme comme,

$$\frac{P(v)}{1-vP(v)} - \frac{v^{q+1}P(v)^{q+2}}{1-vP(v)} + v^{q+1}P(v)^{q+2} + \ldots.$$

ou bien encore

$$Q(v) + \frac{v^{q+1}[R(v) - P(v)^{q+2}]}{1-vP(v)} + v^{q+1}P(v)^{q+2} + \ldots,$$

en désignant par $Q(v)$ le quotient de la première division ordonné suivant les puissances croissantes de v et terminé au terme en v^q, et par $v^{q+1}R(v)$ le reste de cette division.

L'expression précédente représente une somme de quantités entières, la division qui y est indiquée se fait donc exactement, et il est manifeste que les exposants de v surpassent q, tant dans le quotient de cette division que dans les développements des quantités

$$v^{q+1}P(v)^{q+2}, \ldots,$$

qui suivent ce quotient.

$Q(v)$ est donc l'ensemble des $q+1$ premiers termes de la progression précédente développée suivant les puissances ascendantes de v.

Ainsi, pour développer $\varphi(x, z)$ en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $x-z$ ou de v, on fera la division

$$\frac{P(v)}{1-vP(v)},$$

en ordonnant le quotient suivant les puissances croissantes de v, puis on divisera chaque terme de ce quotient par le produit des nombres entiers qui ne surpassent pas son degré.

22. La fonction $\varphi(x, z)$ peut être mise sous forme finie.

La fraction rationnelle

$$\frac{P(v)}{1-vP(v)}$$

est décomposable en fraction simple. Si $\frac{1}{b}$ est l'une des racines de

l'équation

$$(28) \qquad 1 - v\,P(v) = 0,$$

on sait que, dans le cas où cette racine est simple, elle ne donne naissance qu'à une seule fraction de la forme

$$\frac{B}{v - \frac{1}{b}} = \frac{-bB}{1 - vb},$$

où B désigne une constante que l'on sait calculer, et dont le développement, suivant les puissances croissantes de v, a pour terme général

$$-bB(bv)^q.$$

Le développement de $\varphi(x, z)$ en série convergente comprend donc une série partielle ayant pour terme général

$$-bB\frac{(bv)^q}{1.2\ldots q},$$

et dont la somme est

$$-bBe^{bv}.$$

Dans le cas où $\frac{1}{b}$ est une racine multiple de l'équation (28), elle donne naissance, si β est son degré de multiplicité, à β fractions simples de la forme

$$\frac{B_i}{\left(v - \frac{1}{b}\right)^i} = (-b)^i B_i (1 - bv)^{-i},$$

i désignant tour à tour les entiers $1, 2, 3, \ldots, \beta$, et B_i une constante correspondante.

Le développement, suivant les puissances croissantes de v, de chacune de ces fractions a pour terme général

$$(-b)^i B_i \frac{i(i+1)\ldots(i+q-1)}{1.2\ldots q} b^q v^q$$

ou

$$(-b)^i B_i \frac{(q+1)(q+2)\ldots(q+i-1)}{1.2\ldots(i-1)} b^q v^q,$$

car

$$\frac{(i+1)\ldots(i+q-1)}{1.2\ldots q}=\frac{1.2.3\ldots(q+i-1)}{1.2\ldots q.1.2\ldots(i-1)}=\frac{(q+1)\ldots(q+i-1)}{1.2\ldots(i-1)}:$$

par conséquent, en posant, pour abréger,

$$G(q)=-bB_1+b^2B_2\frac{q+1}{1}-b^3B_3\frac{(q+1)(q+2)}{1.2}+\ldots$$
$$+(-b)^\beta B_\beta\frac{(q+1)\ldots(q+\beta-1)}{1.2\ldots(\beta-1)},$$

$G(q)$ sera le coefficient de $b^q v^q$, dans la somme des développements, suivant les puissances croissantes de v, de toutes les fractions auxquelles la racine $\frac{1}{b}$ donne naissance.

Le développement de $\varphi(x, z)$ en série convergente comprend donc encore une série partielle correspondante à la racine multiple $\frac{1}{b}$, et ayant pour terme général

$$G(q)\frac{b^q v^q}{1.2\ldots q}.$$

Pour montrer que la somme de cette série partielle a une expression finie, je vais transformer $G(q)$ en posant

$$(29)\quad M_0+M_1q+M_2q(q-1)+\ldots+M_{\beta-1}q(q-1)\ldots(q-\beta+2)=G(q),$$

et je déterminerai les coefficients $M_0, M_1,\ldots$, au moyen des équations

$$M_0=G(0),$$
$$M_0+M_1=G(1),$$
$$M_0+2M_1+1.2M_2=G(2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$M_0+(\beta-1)M_1+(\beta-2)(\beta-1)M_2+\ldots+1.2\ldots(\beta-1)M_{\beta-1}=G(\beta-1).$$

Leur forme montre qu'elles fourniront, pour les coefficients cherchés, un système unique de valeurs finies, et, de plus, ces valeurs portées

dans l'équation (29) la réduiront à une identité, puisqu'elle est du degré $\beta - 1$, et qu'alors elle sera satisfaite par β valeurs de q, savoir : $0, 1, 2, \ldots, \beta - 1$.

Le terme général de la série correspondante à $\frac{1}{b}$, dans le développement de $\varphi(x, z)$, peut donc être mis sous la forme suivante

$$M_{\beta-1}(bv)^{\beta-1}\frac{(bv)^{q-\beta+1}}{1.2\ldots(q-\beta+1)} + M_{\beta-2}(bv)^{\beta-2}\frac{(bv)^{q-\beta+2}}{1.2\ldots(q-\beta+2)} + \ldots$$
$$+ M_2(bv)^2\frac{(bv)^{q-2}}{1.2\ldots(q-2)} + M_1 bv\frac{(bv)^{q-1}}{1.2\ldots(q-1)} + M_0\frac{(bv)^q}{1.2\ldots q};$$

et l'on aurait cette série partielle en donnant à q les valeurs $0, 1, 2, \ldots$, puis en ajoutant les résultats.

Si l'on conçoit qu'on fasse cette addition, en groupant tous les termes contenant une même valeur de $\frac{(bv)^q}{1.2\ldots q}$, on aura, en posant

$$K_b = M_0 + M_1(bv) + M_2(bv)^2 + \ldots + M_{\beta-1}(\beta v)^{\beta-1},$$

un résultat de la forme

$$K_b\left[1 + \frac{bv}{1} + \frac{(bv)^2}{1.2} + \ldots\right].$$

La série correspondante à la racine $\frac{1}{b}$ a donc pour somme

$$K_b e^{bv}.$$

En conséquence, si $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots, \frac{1}{l}$, sont les diverses racines de l'équation (28), et $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$, leurs degrés respectifs de multiplicité, la valeur de $\varphi(x, z)$ sera donnée par la formule

$$\varphi(x, z) = K_b e^{bv} + K_c e^{cv} + \ldots + K_l e^{lv},$$

où $K_b, K_c, \ldots, K_l$ désignent des polynômes connus dont les degrés sont $\beta - 1, \gamma - 1, \ldots, \lambda - 1$.

On remarquera que $b, c, \ldots, l$, dont les inverses sont les racines de

l'équation (28), sont elles-mêmes les racines de l'équation

$$r^{p+1} = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \ldots + A_p r^p,$$

obtenue en négligeant le terme $A(x)$ de l'équation proposée (25), et en y remplaçant $\frac{d^k y}{dx^k}$ par r^k.

23. L'équation (H) peut s'écrire, dans le cas où (25) est l'équation différentielle proposée,

$$\frac{d^{p+1} y}{dx^{p+1}} = F(x) - A(x) + \int_{x_0}^{x} [F(z) - A(z)](K_b e^{bv} + K_c e^{cv} + \ldots + K_l e^{lv})\, dz$$

$$+ A(x) + \int_{x_0}^{x} A(z)(K_b e^{bv} + K_c e^{cv} + \ldots + K_l e^{lv})\, dz;$$

puisque $F(z) - A(z)$ est un polynôme entier, on saura toujours trouver les intégrales de la première ligne, et les résultats pourront être intégrés $p+1$ fois; quant aux intégrales de la seconde ligne, en général on ne saura pas les trouver; mais, dans tous les cas, la résolution de l'équation (25) est ramenée aux quadratures, et je pourrais m'arrêter ici.

24. Cependant je vais encore montrer comme la notation du numéro **19** facilite la résolution de l'équation (25) dans le cas où l'on a $A(x) = 0$.

Je pose

$$u_0 = z - x_0, \quad v_0 = x - x_0,$$

et comme $F(z)$ est, dans le cas actuel, un polynôme entier en $z - x_0$, on trouvera aisément un autre polynôme $F_1(u_0)$, tel que l'on ait

$$F(z) = F_1(u_0) \quad \text{et} \quad F(x) = F_1(v_0).$$

En faisant usage de la valeur (26) de $\varphi(x, z)$, l'équation (H) deviendra

$$\frac{d^{p+1} y}{dx^{p+1}} = F_1(v_0) + \int_0^{v_0} F_1(u_0)\, \Gamma P(v) + v P(v)^2 + v^2 P(v)^3 + \ldots \Big]\, du_0.$$

Puisqu'on a $v = x - z$ et $u_0 = z - x_0$ la formule (24) est applicable à l'intégrale précédente, et elle donne

$$\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = \mathrm{F}_1 \Gamma v_0 \Big) + \Gamma v_0 \mathrm{F}_1(v_0) \left[\mathrm{P}(v_0) + v_0 \mathrm{P}(v_0)^2 + v_0^2 \mathrm{P}(v_0)^3 + \ldots \right] \Big].$$

Pour trouver la valeur de y, il faudrait intégrer $(p+1)$ fois ce résultat par rapport à x, et chaque fois de x_0 à x; mais comme il revient au même de l'intégrer $p+1$ fois par rapport à v_0, et chaque fois de o à v_0, la formule (22) peut être employée et elle conduit à

$$y = \theta(v_0) + \Gamma v_0^{p+1} \mathrm{F}_1(v_0) \left[1 + v_0 \mathrm{P}(v_0) + v_0^2 \mathrm{P}(v_0)^2 + \ldots \right] \Big].$$

Des raisonnements et des calculs analogues à ceux qui ont été faits à l'occasion de la fonction $\varphi(x, z)$ montreraient d'abord que y peut être développée en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de v_0, puis que y peut être mise sous forme finie, et l'on trouverait par cette voie la valeur bien connue de y.

SUR LA FORME

$$x^2 + xy + y^2 + 3z^2 + 3zt + 3t^2;$$

Par M. J. LIOUVILLE.

Il nous est facile maintenant d'indiquer une méthode simple pour trouver le nombre

$$N(n = x^2 + xy + y^2 + 3z^2 + 3zt + 3t^2)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + xy + y^2 + 3z^2 + 3zt + 3t^2,$$

où n est un entier donné et x, y, z, t des entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs.

Et d'abord on voit sans peine que quand il s'agit d'un entier multiple de 3, la valeur du nombre demandé est égale à celle de

$$N(n = x^2 + xy + y^2 + z^2 + zt + t^2)$$

que nous avons donnée dans le cahier de mai 1863 (p. 141). On peut donc se borner au cas d'un entier premier à 3, c'est-à-dire faire seulement

$$n = 3g + 1$$

et

$$n = 3g + 2.$$

Mais d'un autre côté il est aisé de prouver que pour

$$n = 3g + 2$$

l'équation proposée est impossible. En d'autres termes, on a

$$N(3g + 2 = x^2 + xy + y^2 + 3z^2 + 3zt + 3t^2) = 0.$$

Nous n'avons donc à nous occuper que des entiers n de la forme $3g+1$.

Dans cette hypothèse de $n=3g+1$, on cherchera (que n soit pair ou impair) la somme

$$\zeta_1(n)$$

des diviseurs de n; et on aura

$$N(n = x^2 + xy + y^2 + 3z^2 + 3zt + 3t^2) = 6\zeta_1(n).$$

Cette formule résout la question proposée.

Ainsi, pour $n=1$, on devra trouver six solutions; et, pour $n=4$, on devra en trouver quarante-deux. Mais je laisse au lecteur à vérifier l'exactitude de ces résultats, et je ne veux pas insister sur les applications numériques que l'on peut faire de notre formule. Je ne m'arrêterai pas non plus à chercher séparément le nombre des solutions propres, m'en référant sur ce point à la méthode générale que l'on connaît.

SUR

L'INTÉGRATION DE LA DIFFÉRENTIELLE

$$\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx\,;$$

Par M. P. TCHÉBICHEF [*].

L'intégration de la différentielle

$$\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$$

ne présente aucune difficulté, si la fonction

$$x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$$

a des facteurs égaux. En faisant donc abstraction de ce cas, nous supposerons dans tout ce qui suit que les facteurs de la fonction

$$x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$$

sont tous différents entre eux. Dans cette hypothèse, comme l'on sait, l'intégration de

$$\frac{dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}$$

en termes finis est impossible; de là on conclut que l'intégrale

$$\int\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$$

[*] Cette Note a été imprimée en 1860 dans le *Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg* (t. III). Nous la reproduisons ici avec plaisir, sur la demande de l'auteur. Nous y joignons même l'extrait substantiel que M. Tchébichef a donné aussi de son travail dans les *Comptes rendus* de notre Académie (t. LI). (J. L.)

ne peut être exprimée en termes finis que dans le cas où l'on donne à la constante A une valeur convenablement choisie. En effet, si l'on admettait que l'intégration de

$$\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$$

en termes finis fût possible dans le cas de $A=C$ aussi bien que dans celui de $A=C_1$, on trouverait que la même chose aurait lieu relativement à la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}$$

qu'on obtient en retranchant les différentielles

$$\frac{x+C}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx,\quad \frac{x+C}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$$

l'une de l'autre, et en divisant leur différence par $C-C_1$, ce qui est inadmissible. D'après cela les différentielles de la forme

$$\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$$

présentent l'un des deux cas : ou, pour une certaine valeur de A, l'intégrale

$$\int\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$$

s'exprime en termes finis, ou bien, pour toutes les valeurs de A, une telle expression de

$$\int\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$$

est impossible. La discussion de la différentielle

$$\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$$

sous ce rapport est d'une très-grande importance. C'est à cela que se réduit, en définitive, l'intégration des différentielles qui contiennent la racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré, comme nous l'avons montré dans le Mémoire sur ces différentielles [*], et c'est par là seulement qu'on peut reconnaître si la fonction elliptique donnée de la troisième espèce est réductible ou non à celle de la première. Ces questions importantes surpassent les moyens que possède l'Analyse dans son état actuel, faute d'un critérium infaillible par lequel, d'après les valeurs des coefficients α, β, γ, δ, on puisse reconnaître si l'intégration de

$$\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx,$$

pour toutes les valeurs de A, est impossible en termes finis ou non. D'après ce qu'Abel a donné dans son ingénieux Mémoire sur l'intégration de la différentielle $\frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}}$, l'intégrale

$$\int\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$$

pour toutes les valeurs de A n'est impossible en termes finis que dans le cas où la fraction continue, résultant du développement de

$$\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta},$$

est dépourvue de périodicité. Mais c'est ce dont on ne peut s'assurer aussi loin que soit prolongé le développement de

$$\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta},$$

vu que le nombre de termes dans une période reste arbitraire. De même on ne peut tirer, par rapport à cette question, aucun parti

---

[*] *Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 6e série, t. VI.

de la considération de certaines intégrales définies, d'après lesquelles on peut assigner analytiquement tous les cas des différentielles de la forme

$$\frac{x+\mathrm{A}}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$$

qui s'intègrent en termes finis; car, pour reconnaître par là que la différentielle donnée, pour toutes les valeurs de A, n'admet pas une telle intégration, il est indispensable d'avoir les valeurs exactes de ces intégrales, tandis qu'elles ne peuvent être évaluées, d'après les coefficients α, β, γ, δ, qu'avec une approximation plus ou moins grande.

Pour la solution complète des questions importantes que nous venons de mentionner, on doit trouver un procédé qui, d'après les coefficients α, β, γ, δ et à l'aide d'une série d'opérations algébriques en nombre limité, conduirait à reconnaître que, par le choix convenable de A, il est possible ou non de rendre l'intégrale

$$\int\frac{x+\mathrm{A}}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$$

exprimable en termes finis. C'est ce que nous avons cherché à faire pour le cas de α, β, γ, δ rationnels, et, pour ce cas, nous avons trouvé une méthode qui, au moyen des opérations algébriques et en nombre limité, conduit ou à trouver l'expression de l'intégrale

$$\int\frac{x+\mathrm{A}}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx,$$

avec une certaine valeur de A, ou à reconnaître que pour aucune valeur de A cette intégrale n'est possible en termes finis.

Cette méthode d'intégration de la différentielle

$$\frac{x+\mathrm{A}}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx,$$

où

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$$

sont rationnels, consiste en ce qui suit :

1° On réduira l'intégrale

$$\int \frac{x + A}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}\, dx$$

à la forme

$$\int \frac{z + B}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}\, dz,$$

où l, m, n sont des nombres entiers, ce qu'on peut toujours faire par la substitution linéaire

$$x = a_0 z + b_0,$$

si la fonction

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

a un facteur rationnel du premier degré. Dans le cas contraire, on réduira préalablement l'intégrale

$$\int \frac{x + A}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}\, dx,$$

en posant

$$\frac{\frac{1}{16}\alpha^3 - \frac{1}{4}\alpha\beta + \frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta} - x^2 - \frac{1}{2}\alpha x - \frac{4\beta - \alpha^2}{8}} = z,$$

d'après quoi, en faisant

$$\frac{-3\alpha^4 + 16\alpha^2\beta - 16\alpha\gamma - 16\beta^2 + 64\delta}{2\alpha^3 - 8\alpha\beta + 16\gamma} = a,$$

$$\frac{3}{4}\alpha^2 - 2\beta = b,$$

$$-\frac{1}{8}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta - \gamma = c,$$

on obtiendra

$$\int \frac{x + A}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{z + 2A - \frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{z^4 + az^3 + bz^2 + cz}}\, dz + \frac{1}{2}\log z,$$

où la nouvelle intégrale contient, sous le signe du radical, un polynôme doué du facteur rationnel z.

2° On examinera si la fonction

$$z^4 + lz^3 + mz^2 + nz$$

est décomposable en deux facteurs rationnels du second degré

$$(z^2 + pz)(z^2 + rz + s)$$

dont les coefficients p, r, s vérifient l'équation

$$(1) \qquad s(p^2 - pr + s) = \text{nombre carré},$$

et au moins l'une de ces deux inégalités

$$(2) \qquad pr - 2s > 0 \quad \text{ou} \quad 4s - r^2 > 0.$$

Dans le cas où il est possible de décomposer la fonction

$$z^4 + lz^2 + mz^2 + nz$$

en deux facteurs $(z^2 + pz)$, $(z^2 + rz + s)$ qui remplissent ces conditions, et où p n'est pas égal à r, on réduira l'intégrale

$$\int \frac{z + \mathrm{B}}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}\, dz,$$

en posant

$$\frac{(p - r)^2 (z^2 + pz)}{(r - p)z + s} = z_1,$$

ce qui donne

$$\int \frac{z + \mathrm{B}}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}\, dz = \frac{1}{2} \int \frac{z_1 + (r - p)(2\mathrm{B} - p)}{\sqrt{z_1[z_1 + (p - r)^2][(z_1 + p^2 - pr)^2 + 4sz_1]}}\, dz_1$$
$$+ \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{z_1} + \sqrt{z_1 + (p - r)^2}}{\sqrt{z_1} - \sqrt{z_1 + (p - r)^2}}.$$

La nouvelle intégrale

$$\int \frac{z_1 + (r - p)(2\mathrm{B} - p)}{\sqrt{z_1[z_1 + (p - r)^2][(z_1 + p^2 - pr)^2 + 4sz_1]}}\, dz_1$$

se réduira de la même manière, en tant que la fonction

$$z_1[z_1+(p-r)^2][(z_1+p^2-pr)^2+4sz_1]$$

est décomposable en deux facteurs rationnels

$$(z_1^2+p_1z_1)(z_1^2+rz_1+s_1)$$

qui remplissent les conditions

$$s_1(p_1^2-p_1r_1+s_1)=\text{nombre carré},$$
$$p_1r_1-2s_1>0 \quad \text{ou} \quad 4s_1-r_1^2>0,$$

p_1 n'étant pas égal à r_1. Et ainsi de suite. Si, dans ces réductions, on rencontre une intégrale

$$\int\frac{z_i+B_i}{\sqrt{z_i^4+l_iz_i^3+m_iz_i^2+n_iz_i}}\,dz_i,$$

dans laquelle la fonction

$$z_i^4+l_iz_i^3+m_iz_i^2+n_iz_i$$

se décompose en deux facteurs

$$(z_i^2+p_iz_i)(z_i^2+r_iz_i+s_i)$$

dont les coefficients p_i, r_i sont égaux, on trouvera immédiatement l'expression de cette intégrale, d'après la formule

$$\int\frac{z_i+\frac{1}{2}p_i}{\sqrt{(z_i^2+p_iz_i)(z_i^2+p_iz_i+s_i)}}\,dz_i=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{z_i^2+p_iz_i}+\sqrt{z_i^2+p_iz_i+s_i}}{\sqrt{z_i^2+p_iz_i}+\sqrt{z_i^2+p_iz_i+s_i}},$$

en prenant

$$B_i=\frac{1}{2}p_i.$$

Dans le cas contraire, on répétera ces réductions jusqu'à ce qu'on

parvienne à l'intégrale

$$\int \frac{z_\lambda + B_\lambda}{\sqrt{z_\lambda^4 + l_\lambda z_\lambda^3 + m_\lambda z_\lambda^2 + n_\lambda z_\lambda}}\, dz_\lambda,$$

dans laquelle la fonction

$$z_\lambda^4 + l_\lambda z_\lambda^3 + m_\lambda z_\lambda^2 + n_\lambda z_\lambda$$

n'est plus décomposable en deux facteurs rationnels du second degré

$$(z_\lambda^2 + p_\lambda z_\lambda)(z_\lambda^2 + r_\lambda z_\lambda + s_\lambda)$$

qui remplissent les conditions

$$s_\lambda(p_\lambda^2 - p_\lambda r_\lambda + s_\lambda) = \text{nombre carré},$$
$$p_\lambda r_\lambda - 2s_\lambda > 0 \quad \text{ou} \quad 4s_\lambda - r_\lambda^2 > 0,$$

et on traitera cette intégrale par un procédé que nous allons exposer tout de suite.

3° Ayant à intégrer la différentielle

$$\frac{z + B}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}\, dz,$$

où la fonction

$$z^4 + lz^3 + mz^2 + nz$$

n'est pas décomposable en deux facteurs rationnels

$$(z^2 + pz)(z^2 + rz + s)$$

qui remplissent les conditions

$$s(p^2 - pr + s) = \text{nombre carré},$$
$$pr - 2s > 0 \quad \text{ou} \quad 4s - r^2 > 0,$$

on calculera, d'après les formules

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} l_{i+1} &= -l_i - \frac{(l_i^2 - 4m_i)^2}{2l_i^3 - 8l_i m_i + 16n_i},\\ m_{i+1} &= -2m_i + \frac{3}{4}l_i^2,\\ n_{i+1} &= -n_i + \frac{1}{2}l_i m_i - \frac{1}{8}l_i^3,\\ l_0 &= l,\quad m_0 = m,\quad n_0 = n, \end{aligned}\right.$$

les nombres

$$\begin{array}{l} l_0,\ m_0,\ n_0,\\ l_1,\ m_1,\ n_1,\\ l_2,\ m_2,\ n_2,\\ \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

en poussant le calcul jusqu'à ce que l'on rencontre dans cette suite une valeur fractionnaire, ou que l'on trouve deux systèmes de nombres

$$\begin{array}{lll} l_\mu, & m_\mu, & n_\mu,\\ l_{\mu+\nu}, & m_{\mu+\nu}, & n_{\mu+\nu} \end{array}$$

qui soient respectivement égaux. Dans le premier cas, on conclura que l'intégrale

$$\int \frac{z+B}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}\,dz,$$

pour aucune valeur de B, n'est exprimable en termes finis. Dans le second cas, il sera certain que cette intégrale, pour une certaine valeur de B, est exprimable en termes finis, et son expression sera donnée par cette formule

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \int \frac{z+B}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}\,dz &= \log\left(\sqrt[2]{z_1}\,\sqrt[2^2]{z_2}\,\dots\sqrt[2^\mu]{z_\mu}\right)\\ &\quad + \frac{2^\nu}{2^\nu - 1}\log\left(\sqrt[2^{\mu+1}]{z_{\mu+1}}\,\sqrt[2^{\mu+2}]{z_{\mu+2}}\dots\sqrt[2^{\mu+\nu}]{z_{\mu+\nu}}\right), \end{aligned}\right.$$

où $z_1, z_2, z_3 \dots, z_{\mu+\nu}$ sont des fonctions algébriques de z qui se déter-

minent ainsi :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
z_1 &= \frac{\frac{1}{16}l_0^3 - \frac{1}{4}l_0 m_0 + \frac{1}{2}n_0}{\sqrt{z^4 + l_0 z^3 + m_0 z^2 + n_0 z} - z^2 - \frac{1}{2}l_0 z - \frac{4m_0 - l_0^2}{8}},\\
z_2 &= \frac{\frac{1}{16}l_1^3 - \frac{1}{4}l_1 m_1 + \frac{1}{2}n_1}{\sqrt{z_1^4 + l_1 z_1^3 + m_1 z_1^2 + n_1 z_1} - z_1^2 - \frac{1}{2}l_1 z_1 - \frac{4m_1 - l_1^2}{8}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_{i+1} &= \frac{\frac{1}{16}l_i^3 - \frac{1}{4}l_i m_i + \frac{1}{2}n_i}{\sqrt{z_i^4 + l_i z_i^3 + m_i z_i^2 + n_i z_i} - z_i^2 - \frac{1}{2}l_i z_i - \frac{4m_i - l_i^2}{8}}.
\end{aligned}\right.$$

Quant à la valeur de B, elle sera donnée par cette formule :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
B = {} & \frac{1}{4}\left(l_0 + \frac{1}{2}l_1 + \frac{1}{2^2}l_2 + \ldots + \frac{1}{2^{\mu-1}}l_{\mu-1}\right)\\
& + \frac{1}{4}\frac{2^\nu}{2^\nu - 1}\left(\frac{1}{2^\mu}l_\mu + \frac{1}{2^{\mu+1}}l_{\mu+1} + \ldots + \frac{1}{2^{\mu+\nu-1}}l_{\mu+\nu-1}\right).
\end{aligned}\right.$$

Le nombre des opérations qu'on aura à faire par cette méthode d'intégration sera toujours limité. Les réductions à exécuter, d'après le 2°, sur l'intégrale

$$\int \frac{z + B}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}\,dz,$$

dans le cas où la fonction

$$z^4 + lz^3 + mz^2 + nz$$

se décompose en deux facteurs $(x^2 + px).(x^2 + rx + s)$ qui vérifient les conditions (1) et (2), seront en nombre inférieur au plus petit exposant des facteurs premiers dont se composent les termes de la fraction

$$\frac{pr - 2s + 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)}}{\sqrt{s(p^2 - pr + s)}},$$

réduite à sa forme la plus simple. Le nombre des systèmes

$$\begin{array}{l} l_0,\ m_0,\ n_0, \\ l_1,\ m_1,\ n_1, \\ \ldots\ \ldots\ldots \end{array}$$

qu'on aura à calculer, d'après le 3°, en traitant l'intégrale

$$\int \frac{z + B}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}\, dz,$$

où la fonction

$$z^4 + lz^3 + mz^2 + nz$$

ne se décompose pas en deux facteurs $(z^2 + pz).(z^2 + rz + s)$ vérifiant les conditions (1) et (2), ne surpassera pas celui des solutions entières des équations

$$Y^2 - 3XZ = m^2 - 3ln,$$

$$Z^2(4X^3Z - X^2Y^2 - 18XYZ + 4Y^3 + 27Z^2)$$
$$= n^2(4l^3n - l^2m^2 - 18lmn + 4m^3 + 27n^2),$$

qui ne peuvent être qu'en nombre limité; en effet, d'après la dernière équation, le carré de l'inconnue Z doit être diviseur de

$$n^2(4l^3n - l^2m^2 - 18lmn + 4m^3 + 27n^2),$$

et tant qu'on fixe la valeur de Z, les deux autres inconnues se déterminent complétement par ces équations.

Pour montrer sur des exemples l'usage de cette méthode, nous allons chercher, en premier lieu, l'intégrale

$$\int \frac{x + A}{\sqrt{x^4 + x^2 + x + \frac{1}{4}}}\, dx.$$

Comme la fonction

$$x^4 + x^2 + x + \frac{1}{4}$$

n'a pas de facteur rationnel du premier degré, on réduira cette inté-

grale, d'après le 1°, en posant

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}-x^2-\frac{1}{2}}=z.$$

De cette façon on obtient

$$(7)\qquad \int\frac{x+A}{\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{z+2A}{\sqrt{z^4-2z^2-z}}\,dz+\frac{1}{2}\log z.$$

En remarquant que la fonction

$$z^4-2z^2-z$$

ne se décompose en deux facteurs rationnels du second degré

$$(z^2+pz)(z^2+rz+s),$$

qu'en prenant

$$p=1,\quad r=-1,\quad s=-1,$$

et que ces valeurs ne vérifient pas la condition

$$s(p^2-pr+s)=\text{nombre carré},$$

on passera immédiatement à la recherche de l'intégrale

$$\int\frac{z+2A}{\sqrt{z^4-2z^2-z}}\,dz,$$

suivant le 3°. Pour cela on calculera les nombres

$$l_0,\ m_0,\ n_0,$$
$$l_1,\ m_1,\ n_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

d'après les formules (3), en prenant

$$l=0,\quad m=-2,\quad n=-1.$$

L'on obtiendra de cette manière

$$\begin{aligned} l_0 &= 0, & m_0 &= -2, & n_0 &= -1, \\ l_1 &= 4, & m_1 &= 4, & n_1 &= 1, \\ l_2 &= -4, & m_2 &= 4, & n_2 &= -1, \\ l_3 &= 4, & m_3 &= 4, & n_3 &= 1. \end{aligned}$$

En remarquant que le dernier système des nombres

$$l_3,\ m_3,\ n_3$$

est identique au second

$$l_1,\ m_1,\ n_1,$$

on s'y arrêtera, et l'on conclura tout de suite que l'intégrale

$$\int \frac{z + 2A}{\sqrt{z^4 - 2z^2 - z}}\, dz,$$

pour une valeur de $2A$ convenablement choisie, est exprimable en termes finis. Comme dans ce cas

$$\mu = 1, \quad \nu = 2,$$

on aura, d'après (4),

$$\int \frac{z + 2A}{\sqrt{z^4 - 2z^2 - z}}\, dz = \log\left(\sqrt{z_1}\right) + \frac{4}{3} \log\left(\sqrt[2^2]{z_2}\,\sqrt[2^3]{z_3}\right),$$

où les fonctions

$$z_1,\ z_2,\ z_3,$$

en vertu de (5), se déterminent ainsi :

$$z_1 = \frac{\frac{1}{16} l_0^3 - \frac{1}{4} l_0 m_0 + \frac{1}{2} n_0}{\sqrt{z^4 + l_0 z^3 + m_0 z^2 + n_0 z} - z^2 - \frac{1}{2} l_0 z - \frac{4 m_0 - l_0^2}{8}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z^4 - 2z^2 - z} - z^2 + 1},$$

$$z_2 = \frac{\frac{1}{16} l_1^3 - \frac{1}{4} l_1 m_1 + \frac{1}{2} n_1}{\sqrt{z_1^4 + l_1 z_1^3 + m_1 z_1^2 + n_1 z_1} - z_1^2 - \frac{1}{2} l_1 z_1 - \frac{4 m_1 - l_1^2}{8}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{z_1^4 + 4 z_1^3 + 4 z_1^2 + z_1} - z_1^2 - 2 z_1} = z + 1,$$

$$z_3 = \frac{\frac{1}{16} l_2^3 - \frac{1}{4} l_2 m_2 + \frac{1}{2} n_2}{\sqrt{z_2^4 + l_2 z^3 + m_2 z_2^2 + n_2 z_2} - z_2^2 - \frac{1}{2} l_2 z_2 - \frac{4 m_2 - l_2^2}{8}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z_2^4 - 4 z_2^3 + 4 z_2^2 - z^2} - z_2^2 + 2 z^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z^4 - 2 z^2 - z - z^2 + 1}}.$$

D'après cela on trouve

$$\int \frac{z + 2A}{\sqrt{z^4 - 2 z^2 - z^4}} dz = \log\left(\sqrt{z_1}\right) + \frac{4}{3} \log\left(\sqrt[2^2]{z_2}\, \sqrt[2^3]{z_3}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \log\left[\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z^4 + 2 z^2 - 1} - z^2 + 1}\right)^4 (z + 1)^2\right].$$

D'autre part, comme

$$\mu = 1, \quad \nu = 2, \quad l_0 = 0, \quad l_1 = 4, \quad l_2 = -4,$$

on obtient, d'après (6), pour la constante 2A, cette valeur

$$\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \left(\frac{4}{2} - \frac{4}{4}\right) = \frac{1}{3}.$$

D'où il suit que

$$A = \frac{1}{6}.$$

D'après ces valeurs de l'intégrale

$$\int \frac{z + 2A}{\sqrt{z^4 - 2 z^2 - z}} dz$$

et de la constante A, la formule (7) nous donne

$$\int \frac{x+\frac{1}{6}}{\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\log\left[\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z^4-2z^2-z-z^2+1}}\right)^4(z+1)^2\right]+\frac{1}{2}\log z,$$

où

$$z=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}-x^2-\frac{1}{2}}.$$

En portant cette valeur précédente de z dans l'expression précédente de l'intégrale

$$\int \frac{x+\frac{1}{6}}{\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}\,dx,$$

on obtient en définitive

$$\int \frac{x+\frac{1}{6}}{\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\log\frac{\left(x^2-\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}\right)^2}{\left(x^2-\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}-\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}\right)}$$

$$=\frac{1}{12}\log\frac{x^2+\sqrt{R}}{x^2-\sqrt{R}}+\frac{1}{6}\log\frac{x^2-\frac{1}{2}+\sqrt{R}}{x^2-\frac{1}{2}+\sqrt{R}}+\frac{1}{6}\log\frac{x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{R}}{x^2+\frac{1}{2}-\sqrt{R}},$$

où

$$R=x^4+x^2+x+\frac{1}{4}.$$

Prenons encore pour exemple l'intégrale

$$\int \frac{z+B}{\sqrt{z^4+5z^3+3z^2-z}}\,dz.$$

Comme la fonction

$$z^4+5z^3+3z^2-z$$

se décompose en deux facteurs rationnels

$$(z^2+pz),\quad (z^2+rz+s),$$

en prenant

$$p=1,\quad r=4,\quad s=-1,$$

et que ces valeurs vérifient la condition

$$s(p^2-pr+s)=\text{nombre carré}$$

et l'inégalité

$$pr-2s>0,$$

on réduira, d'après le 2°, l'intégrale

$$\int \frac{z+B}{\sqrt{z^4+5z^3+3z^2-z}}\,dz,$$

en posant

$$\frac{(p-r)^2(z^2+pz)}{(r-p)z+s}=\frac{9(z^2+z)}{3z-1}=z_1.$$

On obtiendra de cette manière

$$\int \frac{z+B}{\sqrt{z^4+5z^3+3z^2-z}}\,dz=\frac{1}{2}\int \frac{z_1+6B-3}{\sqrt{z_1^4-z_1^3-81z_1^2+81z_1}}\,dz_1$$
$$+\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{z_1}+\sqrt{z_1+9}}{\sqrt{z_1}+\sqrt{z_1+9}}.$$

La fonction

$$z_1^4-z_1^3-81z_1^2+81z_1,$$

étant composée de quatre facteurs rationnels du premier degré

$$z_1,\quad z_1-9,\quad z_1-1,\quad z_1+9,$$

on trouve, pour sa décomposition en deux facteurs rationnels du second degré

$$(z^2 + pz)(z^2 + rz + s),$$

trois systèmes de valeurs pour p, r, s, savoir :

$$\begin{array}{lll} p = -9, & r = 8, & s = -9, \\ p = -1, & r = 0, & s = -81, \\ p = 9, & r = -10, & s = 9. \end{array}$$

Or, comme aucun de ces systèmes ne rend la quantité $s(p^2 - pr + s)$ égale à un carré parfait, on cherchera l'intégrale

$$\int \frac{z_1 + 6B - 3}{\sqrt{z_1^4 - z_1^3 - 81 z_1^2 + 81 z_1}}\, dz$$

par le 3°. Mais, en passant à la détermination des nombres

$$\begin{array}{l} l_0,\ m_0,\ n_0, \\ l_1,\ m_1,\ n_1, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

d'après les formules (3), on devra s'arrêter sur l_1, en remarquant qu'il résulte pour lui une valeur fractionnaire

$$1 - \frac{(1 + 4.81)^2}{-2 - 8.1.81 + 16.81} = -\frac{104979}{646};$$

de là on conclura tout de suite que l'intégrale

$$\int \frac{z_1 + 6B - 3}{\sqrt{z_1^4 + z_1^3 - 81 z_1^2 + 81 z_1}}\, dz_1,$$

et conséquemment celle en question

$$\int \frac{z + B}{\sqrt{z^4 + 5z^3 + 3z^2 - z}}\, dz,$$

est inexprimable en termes finis, quelle que soit la valeur de la constante B.

SUR

L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES IRRATIONNELLES;

PAR M. P. TCHÉBICHEF [*].

En vertu de ce que nous avons montré dans le Mémoire sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré (*Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, 1857), l'intégration de la différentielle

$$\frac{f(x)}{F(x)}\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\lambda}}$$

en termes finis, quelles que soient les fonctions entières $f(x)$ et $F(x)$, se réduit définitivement à l'évaluation des intégrales de la forme

$$\int\frac{x+L}{\sqrt{x^4+lx^3+mx^2+nx+p}}\,dx,$$

où l, m, n, p sont des valeurs connues et L une constante qui se détermine par la condition que ces intégrales soient exprimables en termes finis. Tant que cette condition peut être remplie, on trouve l'intégrale

$$\int\frac{x+L}{\sqrt{x^4+lx^3+mx^2+nx+p}}\,dx,$$

d'après la méthode d'Abel, en développant en fraction continue l'expression

$$\sqrt{x^4+lx^3+mx^2+nx+p},$$

[*] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. LI, p. 46), séance du 9 juillet 1860.

et en poussant ce développement jusqu'à des dénominateurs où se manifeste leur périodicité. Mais comme cette périodicité n'a pas lieu dans le cas où l'intégrale

$$\int \frac{x + \mathrm{L}}{\sqrt{x^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p}}\, dx,$$

pour toutes les valeurs de L, est impossible en termes finis, on conçoit que cette méthode conduit à une série d'opérations qui peut aller à l'infini sans donner aucun résultat décisif. Cette difficulté ne saura être levée par la considération des intégrales qui déterminent la nature de la fonction

$$\int \frac{x + \mathrm{L}}{\sqrt{x^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p}}\, dx$$

et par lesquelles on peut reconnaître s'il y a lieu de chercher son expression en termes finis, car pour cela il est indispensable d'avoir la valeur exacte de ces intégrales, tandis qu'elles ne peuvent être évaluées qu'approximativement. Pour l'intégration en question, on doit avoir un moyen qui, d'après la nature des quantités l, m, n, p, et à l'aide des seules opérations algébriques en nombre limité, puisse manifester si l'intégrale

$$\int \frac{x + \mathrm{L}}{\sqrt{x^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p}}\, dx$$

est possible ou non en termes finis. C'est ce que nous avons cherché à faire, et nous y sommes parvenu, en tant que les quantités l, m, n, p sont rationnelles et le polynôme

$$x^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p$$

indécomposable en facteurs linéaires à l'aide des seuls radicaux carrés. Au moyen de la méthode que nous avons trouvée pour l'intégration des différentielles de ce cas, on parvient, par une série d'opérations identiques, ou à s'assurer que cette intégration est impossible en termes finis, ou bien à l'exécuter complétement. En tous cas le procédé se termine, et chaque fois on peut assigner la limite du

nombre des opérations qu'on aura à faire. En remettant l'exposé de cette méthode à un Mémoire détaillé sur ce sujet, nous nous bornerons pour le moment à observer que, pour le cas que nous avons résolu, la méthode en question fournit un moyen infaillible d'assigner la limite où, en cherchant l'intégrale par la méthode d'Abel, on peut toujours arrêter le développement en fraction continue. Cela posé, et en admettant, pour plus de simplicité, que la différentielle

$$\frac{x+\mathrm{L}}{\sqrt{x^4+lx^3+mx^2+nx+p}}\,dx$$

est réduite à la forme

$$\frac{x+\mathrm{A}}{\sqrt{x^4+px^2+qx+r}}\,dx,$$

p, q, r désignant des nombres entiers, la méthode d'Abel relative au cas en question peut être complétée ainsi qu'il suit :

Si dans la différentielle

$$\frac{x+\mathrm{A}}{\sqrt{x^4+px^2+qx+r}}\,dx,$$

le polynôme

$$x^4+px^2+qx+r,$$

ayant pour coefficients des nombres entiers, n'est pas décomposable en facteurs linéaires à l'aide des seuls radicaux carrés, cette différentielle, quelle que soit la valeur A, ne pourra être intégrée en termes finis, tant que dans la fraction continue résultant du développement de

$$\sqrt{x^4+px^2+qx+r},$$

aucun des $2\mathrm{N}-1$ premiers dénominateurs n'est du deuxième degré, N étant le nombre des solutions entières des équations

$$y^2-3xz=p^2+12r,$$

$$z^2[4x^3z-x^2y^2-18xyz+4y^3+27z^2]$$
$$=(4p^3+27q^2)q^2-16[(p^2-4r)^2+9pq^2]r.$$

Dans le cas contraire, pour une certaine valeur de A, la différentielle

$$\frac{x+A}{\sqrt{x^4+px^2+qx+r}}\,dx$$

s'intègre en termes finis, et l'on trouve son intégrale par la formule

$$\frac{1}{2\lambda}\log\frac{\varphi(x)+\sqrt{x^4+px^2+qx+r}}{\varphi(x)+\sqrt{x^4+px^2+qx+r}},$$

où $\varphi(x)$ est la réduite qu'on obtient en s'arrêtant dans le développement de

$$\sqrt{x^4+px^2+qx+r}$$

en fraction continue au premier dénominateur du second degré, et λ le degré du numérateur de cette réduite.

La méthode d'Abel ainsi complétée donne tout ce qui est nécessaire pour l'intégration des différentielles en question, vu qu'on peut toujours déterminer le nombre N qui désigne combien les équations

$$y^2-3xz=p^2+12r,$$

$$z^2[4x^3z+x^2y^2-18xyz+4y^3+27z^2]$$
$$=(4p^3+27q^2)q^2-16[(p^2-4r)^2+9pq^2]r$$

ont de solutions entières.

En effet, la dernière de ces équations suppose que le carré de z divise le nombre

$$(4p^3+27q^2)q^2-16[(p^2-4r)^2+9pq^2]r.$$

Donc, en cherchant les diviseurs carrés de ce nombre, on parviendra à assigner toutes les valeurs que peut avoir l'inconnue z. D'autre part, en prenant pour z chacune de ces valeurs, avec le signe + ou —, on aura pour obtenir x et y deux équations qui déterminent complète-

ment ces inconnues, et qui, d'après la forme de ces égalités, ne peuvent avoir plus de six solutions. Il sera donc facile d'énumérer les solutions entières de ces équations, et on voit que leur totalité ne surpassera jamais le produit du nombre des diviseurs carrés de

$$(4p^3 + 27q^2)q^2 - 16[(p^2 - 4r)^2 + 9pq^2]r$$

par 12.

PRIX PROPOSÉS PAR L'ACADÉMIE DE BERLIN.

I.

EX PECUNIA A STEINERO INSTITUENDIS CERTAMINIBUS LITTERARIIS LEGATA.

Quum Ill. Steinerus commentatione egregia, quæ anno MDCCCLVI in relationibus Academiæ menstruis prodiit [*], fundamenta posuerit quibus superficierum tertii ordinis theoria geometrica superstrui potest, Academia scientiarum viros in methodis syntheticis versatos cohortatur, ut quæ a præstantissimo geometra inchoata sunt compleant atque perficiant. Quem ad finem id potissimum spectandum erit, primum ut propositionum præcipuarum demonstrationes ab ipso auctore non nisi primis lineis designatæ diligenter elaborentur; deinde ut disquisitio geometrica ad eos quoque casus nondum satis exploratos extendatur, in quibus evenit ut elementa quædam ad superficiei constructionem a Steinero adhibita non sint realia. Præterea etsi Academia non postulat, ut lineæ duplicis curvaturæ ex intersectione duarum superficierum tertii ordinis prodeuntes accuratius examinentur, tamen rem gravissimam facturum esse censet, qui hanc partem Steinerianæ doctrinæ suppleverit.

Constitutæ sunt Calendæ Martiæ anni MDCCCLXVI, ultra quas nullæ commentationes ad certamen admittentur. Addendæ sunt ex more solito commentationibus schedulæ, quæ nomen auctoris continent, obsignatæ atque iisdem inscriptionibus, quæ commentationibus præfixæ sunt, insignitæ. Præmium, quod est DC Ioachimicorum, adjudicabitur in conventu solemni Leibnitiano, qui habebitur mense Iulio anni MDCCCLXVI. In conscribendis commentationibus lingua uti licet sive germanica, sive latina, sive gallica.

[*] Videas etiam *Diarii Crelliani*, vol. LIII.

II.

Theoria functionum ellipticarum et Abelianarum jam in omnibus fere matheseos partibus problematum, quæ antehac difficillima videbantur, solutionem perfectam suppeditavit. Neque dubitandum est quin plura adhuc nec minus gravia ejusdem generis restent, quæ novos geometrarum conatus exspectant. Quam ob rem Academiæ scientiarum visum est hanc publice proponere quæstionem :

Ut problema quodcunque majoris momenti, cujus argumentum ex algebra, doctrina numerorum, calculo integrali, geometria, disciplina mechanica et physica mathematica sumi potest, transcendentium ellipticarum aut Abelianarum ope absolvatur.

Constitutæ sunt Calendæ Martiæ anni MDCCCLXVII, ultra quas nullæ commentationes ad certamen admittentur. Addendæ sunt ex more solito commentationibus schedulæ quæ nomen auctoris contineant, obsignatæ et iisdem inscriptionibus, quæ commentationibus præfixæ sunt, insignitæ. Præmium quod est centum ducatorum aureorum adjudicabitur in conventu solemni Leibnitiano, qui habebitur mense Iulio anni MDCCCLXVII. In conscribendis commentationibus lingua uti licet sive germanica, sive latina, sive gallica.

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

TREIZIÈME ARTICLE [*].

1. Je profite d'un instant de liberté pour reprendre la publication des notes que rempli d'une ardeur extraordinaire j'ai (en quelques semaines) entassées les unes sur les autres pendant l'automne de 1857, au sujet de certaines *formules générales* également utiles dans la théorie des nombres et dans celle des suites infinies. Le lecteur, dont je réclame de nouveau l'indulgence, voudra bien me permettre cette fois encore d'ajourner les démonstrations, qui sont au reste des plus simples.

Convenons d'abord de quelques notations dont nous ferons constamment usage dans le cours de cet article.

Soit

$$m$$

un nombre entier donné, de la forme

$$4\mu + 3.$$

Posons de toutes les manières possibles

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2m_3,$$

m_1, m_2, m_3 étant des entiers, savoir : m_1 impair, positif ou négatif; m_2

[*] Les six premiers articles ont été publiés en 1858, les cinq suivants en 1859, et le douzième en 1860.

pair ou impair, positif, nul ou négatif; enfin m_3 impair et positif. Il est bien clair que l'expression

$$m_1^2 + 4m_2^2 + 2m_3$$

ne peut représenter, sous les conditions indiquées, que des entiers $\equiv 3 \pmod{4}$. Aussi supposons-nous

$$m = 4\mu + 3.$$

Maintenant décomposons l'entier impair et positif m_3 en un produit de deux facteurs conjugués d_3, δ_3, en sorte que l'on ait

$$m_3 = d_3 \delta_3,$$

d_3 et δ_3 étant aussi des entiers impairs et positifs. L'expression de m deviendra

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\delta_3.$$

L'entier m étant donné, il y aura plusieurs systèmes de valeurs de

$$m_1, \quad m_2, \quad m_3,$$

et à fortiori plusieurs systèmes de valeurs de

$$m_1, \quad m_2, \quad d_3, \quad \delta_3.$$

Nous considérons à la fois tous ces systèmes, et c'est à leur ensemble que va se rapporter le signe de sommation

$$\Sigma$$

qui figurera dans nos formules.

2. Ces préliminaires compris, désignons par

$$F(x, y, z)$$

une fonction impaire (analytique ou numérique) des trois indéterminées x, y, z dont les valeurs seront toujours entières, de signes quelconques, mais x impair, y et z pairs, la valeur zéro admise. En di-

sant que la fonction

$$F(x, y, z)$$

est impaire, relativement à z par exemple, nous entendons que, pour toutes les valeurs de x, y, z dont nous ferons usage, on aura

$$F(x, y, -z) = -F(x, y, z);$$

et comme il peut arriver que $z = 0$, nous ajoutons la condition spéciale

$$F(x, y, 0) = 0.$$

Par rapport à y, on devra avoir de même

$$F(x, -y, z) = -F(x, y, z), \quad F(x, 0, z) = 0.$$

Mais relativement à x, entier impair et dès lors toujours différent de zéro, il suffit que

$$F(-x, y, z) = -F(x, y, z);$$

il n'y a pas à se préoccuper de la valeur de

$$F(0, y, z),$$

qui ne se présentera jamais. On n'a à tenir compte que des systèmes de valeurs de x, y, z dont on fait usage. La fonction $F(x, y, z)$ est suffisamment définie pour notre objet quand on donne pour ces divers systèmes (en nombre limité) les valeurs correspondantes de la fonction, lesquelles sont du reste à volonté, sous les conditions que l'on vient d'énumérer.

5. Les valeurs que nous attribuons à

$$x, y, z$$

sont tirées du mode de partition de l'entier donné m que fournit notre équation

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\delta_3.$$

Les voici :

$$x = \delta_3 - 2m_2,$$
$$y = d_3 + 2m_2 - m_1,$$
$$z = d_3 + 2m_2 + m_1.$$

A chaque système

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ \delta_3$$

répond une valeur de

$$F(x, y, z),$$

savoir

$$F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1).$$

Cette valeur est tantôt positive, tantôt négative. Or notre théorème consiste en ce que les valeurs négatives et les valeurs positives se compensent exactement, de façon que la somme algébrique pour l'ensemble des systèmes

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ \delta_3,$$

qui se rapportent à l'entier donné m, est égale à zéro. C'est ce que nous exprimons en écrivant l'équation

$$(\mathrm{A}) \qquad \sum F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1) = 0,$$

qui nous paraît constituer une formule nouvelle et très-remarquable.

La somme indiquée au premier membre de l'équation (A) est au fond une somme multiple. Nous ne mettons cependant qu'un seul signe

$$\sum,$$

espérant que cette simplification (que nous nous sommes déjà permise dans une lettre adressée à M. Hermite, cahier de février 1862) ne gênera en rien nos lecteurs, accoutumés maintenant à ce genre de formules.

4. Nous nous bornerons aux deux exemples de $m = 3$ et de $m = 7$. Pour $m = 3$, l'équation générale

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\delta_3$$

fournit deux équations particulières

$$3 = 1^2 + 4.0^2 + 2.1.1,$$
$$3 = (-1)^2 + 4.0^2 + 2.1.1.$$

Il n'y a donc que deux valeurs de

$$F(x, y, z),$$

qui sont

$$F(1, 0, 2), \quad F(1, 2, 0).$$

Elles sont toutes deux nulles, puisqu'une des indéterminées se trouve égale à zéro sous le signe F. Leur somme aussi est donc nulle.

Pour $m = 7$, il y a huit équations de la forme

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\delta_3,$$

savoir :

$$7 = 1^2 + 4.0^2 + 2.1.3,$$
$$7 = 1^2 + 4.0^2 + 2.3.1,$$
$$7 = (-1)^2 + 4.0^2 + 2.1.3,$$
$$7 = (-1)^2 + 4.0^2 + 2.3.1,$$
$$7 = 1^2 + 4.1^2 + 2.1.1,$$
$$7 = 1^2 + 4(-1)^2 + 2.1.1,$$
$$7 = (-1)^2 + 4.1^2 + 2.1.1,$$
$$7 = (-1)^2 + 4(-1)^2 + 2.1.1.$$

La somme des valeurs correspondantes de

$$F(x, y, z)$$

est donc composée de huit termes :

$$F(3, 0, 2) + F(1, 2, 4) + F(3, 2, 0) + F(1, 4, 2) + F(-1, 2, 4)$$
$$+ F(3, -2, 0) + F(-1, 4, 2) + F(3, 0, -2).$$

Or quatre de ces termes sont nuls puisque une des indéterminées y est nulle sous le signe F; et les quatre autres se détruisent deux à

deux, puisque, par la nature de la fonction F, on a

$$F(-1, 2, 4) = -F(1, 2, 4)$$

et

$$F(-1, 4, 2) = -F(1, 4, 2).$$

La formule (A) est donc vérifiée.

5. On tirera de la formule (A) une formule particulière, mais encore d'une grande étendue, en remplaçant la fonction

$$F(x, y, z)$$

par celle-ci

$$(-1)^{\frac{x-1}{2}} F(y, z),$$

qui remplira les conditions voulues si la fonction nouvelle

$$F(y, z)$$

est telle que l'on ait

$$F(-y, z) = -F(y, z), \quad F(y, -z) = -F(y, z)$$

avec

$$F(0, z) = 0, \quad F(y, 0) = 0.$$

Relativement à x, en effet,

$$(-1)^{\frac{x-1}{2}}$$

est une fonction impaire, changeant seulement de signe quand x change de signe en conservant sa valeur numérique qui, ne l'oublions pas, est toujours exprimée par un entier impair.

Je pose, d'après cela, l'équation

$$(A_1) \quad \sum (-1)^{\frac{\delta_3-1}{2}+m_2} F(d_3 + 2m_2 - m_1, \; d_3 + 2m_2 + m_1) = 0;$$

mais je ne m'arrête pas à la vérifier.

6. Notons encore une équation qu'on déduira de l'équation (A), en

y prenant

$$F(x, y, z) = \mathcal{F}\left(x, \frac{z+y}{2}\right) - \mathcal{F}\left(x, \frac{z-y}{2}\right),$$

la fonction

$$\mathcal{F}(x, u)$$

continuant à être impaire par rapport à x, c'est-à-dire restant assujettie à la condition que

$$\mathcal{F}(-x, u) = -\mathcal{F}(x, u),$$

mais étant au contraire paire par rapport à u, en sorte que

$$\mathcal{F}(x, -u) = \mathcal{F}(x, u).$$

De cette manière, en effet, les conditions exigées pour l'exactitude de la formule (A) seront remplies, comme on le verra facilement.

Je pose donc à son tour l'équation

$$(A_2) \qquad \sum [\mathcal{F}(\delta_3 - 2m_2, d_3 + 2m_2) - \mathcal{F}(\delta_3 - 2m_2, m_1)] = 0.$$

Elle nous apprend que les deux sommes

$$\sum \mathcal{F}(\delta_3 - 2m_2, d_3 + 2m_2)$$

et

$$\sum \mathcal{F}(\delta_3 - 2m_2, m_1)$$

sont égales entre elles; cela aura certainement lieu, je le répète, pourvu que l'on ait

$$\mathcal{F}(-x, u) = -\mathcal{F}(x, u), \quad \mathcal{F}(x, -u) = \mathcal{F}(x, u),$$

quelle que soit d'ailleurs la fonction

$$\mathcal{F}(x, u).$$

7. De l'équation (A_2), on pourrait descendre à l'équation plus par-

ticulière encore

$$(A_3) \qquad \sum (-1)^{\frac{\delta_3 - 1}{2} + m_2} [f(d_3 + 2m_2) - f(m_1)] = 0,$$

où la fonction

$$f(u)$$

doit être paire, c'est-à-dire telle que l'on ait

$$f(-u) = f(u).$$

Par exemple, on pourra prendre

$$f(u) = \cos(ut),$$

t étant une constante quelconque, ce qui donnera

$$\sum (-1)^{\frac{\delta_3 - 1}{2} + m_2} [\cos(d_3 + 2m_2)t - \cos m_1 t] = 0,$$

équation qu'on peut réduire à la forme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta_3 - 1}{2} + m_2} \cos d_3 t \cos 2m_2 t = \sum (-1)^{\frac{\delta_3 - 1}{2} + m_2} \cos m_1 t.$$

en supprimant la somme nulle

$$\sum (-1)^{\frac{\delta_3 - 1}{2} + m_1} \sin d_3 t \sin 2m_2 t,$$

et qui se trouve répondre à une combinaison de deux des équations établies par Jacobi dans ses *Fundamenta nova*.

Mais je n'insiste pas sur ces détails. Mon but, dans cet article, était surtout de poser la formule générale (A), en expliquant nettement sous quelles conditions elle est exacte. Les applications viendront plus tard.

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande une expression simple du nombre des représentations d'un entier n quelconque par la forme à six variables

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2),$$

ou, ce qui revient au même, du nombre

$$\mathrm{N}\left[n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right]$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2),$$

dans laquelle x, y, z, t, u, v sont des entiers pairs ou impairs, indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Nous poserons

$$n = 2^\alpha m,$$

m désignant un entier impair, et l'exposant α pouvant se réduire à zéro. La valeur de

$$\mathrm{N}\left[2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right]$$

dépendra naturellement de l'exposant α. Quand α est > 0, elle dépend aussi de la valeur de m (mod. 4). Mais elle dépend surtout d'une certaine fonction numérique de m proportionnellement à laquelle

$$\mathrm{N}\left[2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right]$$

varie quand on considère la suite des entiers $2^\alpha m$ qui répondent à une même valeur donnée de α et de m (mod. 4). Deux mots d'abord sur cette fonction numérique

2. Décomposons l'entier m, de toutes les manières possibles, en un produit de deux facteurs conjugués d, δ, en sorte que

$$m = d\delta.$$

La fonction numérique dont nous parlons s'exprime par la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2.$$

En introduisant un symbole connu de Legendre, avec la signification plus étendue que lui attribue Jacobi, on peut encore l'écrire

$$\sum \left(\frac{-1}{\delta}\right) d^2.$$

On s'assure aisément que quand m est de la forme $4l+1$, cette fonction représente l'excès de la somme des carrés des diviseurs de m qui sont $\equiv 1$ (mod. 4) sur la somme des carrés des diviseurs qui sont $\equiv 3$ (mod. 4). L'inverse a lieu quand m est de la forme $4l+3$. Pour $m = 1, 3, 5, 7, 9$, etc., les valeurs respectives de $\rho_2(m)$ sont 1, 8, 26, 48, 73, etc.

Déjà, dans le temps, ayant eu occasion de considérer la fonction numérique plus générale

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^\mu,$$

je l'ai représentée par

$$\rho_\mu(m).$$

A l'indice $\mu = 2$ répond la fonction particulière

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2$$

dont nous avons besoin aujourd'hui. Représentons-la donc par

$$\rho_2(m).$$

Observons encore que la fonction $\rho_2(m)$ est décomposable en facteurs, et que si en exprimant m par un produit de puissances de nombres premiers on fait

$$m = \Pi(a^r),$$

alors

$$\rho_2(m)$$

s'exprimera par le produit

$$\Pi\left[a^{2r} + \left(\frac{-1}{a}\right)a^{2r-2} + a^{2r-4} + \left(\frac{-1}{a}\right)a^{2r-6} + \ldots\right].$$

Enfin rappelons une autre fonction

$$R_2(m),$$

exprimée par le produit plus simple

$$\Pi\left[a^{2r} + \left(\frac{-1}{a}\right)a^{2r-2}\right],$$

et liée intimement à $\rho_2(m)$. Nous aurons en effet à employer la fonction $R_2(m)$ dans le cours même du présent article.

3. Revenant maintenant à la valeur demandée de

$$N\left[2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right],$$

considérons d'abord le cas d'un nombre impair, c'est-à-dire le cas de $\alpha = 0$, en sorte qu'il s'agisse seulement de

$$N\left[m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right].$$

L'octuple de $\rho_2(m)$ exprimera le nombre cherché.

En d'autres termes, on a

$$(1) \qquad N\left[m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right] = 8\rho_2(m).$$

La formule (1) reste la même pour $m = 4l + 1$ et pour $m = 4l + 3$, c'est-à-dire pour

$$\left(\frac{-1}{m}\right) = 1$$

et pour

$$\left(\frac{-1}{m}\right) = -1.$$

La valeur de

$$\left(\frac{-1}{m}\right)$$

joue au contraire un rôle quand il s'agit d'un entier pair $2^\alpha m$. Car, dans l'hypothèse de $\alpha > 0$, je trouve que

$$(2)\quad \mathrm{N}\left(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right) = 4\left[2^{2\alpha+1} - \left(\frac{-1}{m}\right)\right]\rho_2(m).$$

Les formules (1) et (2) résolvent complétement la question proposée au n° 1. Je n'ai pas besoin de dire que le facteur

$$4\left[2^{2\alpha+1} - \left(\frac{-1}{m}\right)\right]$$

de $\rho_2(m)$ dans la formule (2) pourrait être remplacé par

$$4\left[2^{2\alpha+1} - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right],$$

ou encore par

$$4\left[2^{2\alpha+1} + (-1)^{\frac{m+1}{2}}\right].$$

4. Appliquons la formule (1),

$$\mathrm{N}\left[m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right] = 8\rho_2(m),$$

à quelques exemples.

Cette formule donne

$$\mathrm{N}\left[1 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right] = 8,$$

résultat qui s'accorde avec les identités

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),$$
$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),$$
$$1 = 0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),$$
$$1 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2 + 2(0^2 + 0^2).$$

Elle donne ensuite

$$N[3 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 64;$$

or cela est confirmé par les identités

$$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2)$$

et

$$3 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 0^2),$$

qui fourniront pour l'entier 3 soixante-quatre représentations, si l'on a soin d'y affecter du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls, puis d'y opérer les permutations convenables.

On trouve encore

$$N[5 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 208.$$

La vérification de ce fait se tire des trois identités suivantes :

$$5 = 1^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),$$
$$5 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 2(1^2 + 0^2),$$
$$5 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2).$$

La première de ces identités fournit quarante-huit représentations de l'entier 5, la seconde en donne cent vingt-huit, la troisième trente-deux ; or

$$48 + 128 + 32 = 208.$$

Les identités

$$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2(0^2 + 0^2),$$
$$7 = 1^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 0^2),$$
$$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2),$$

qui fournissent respectivement, pour l'entier 5, soixante-quatre, cent quatre-vingt-douze et cent vingt-huit représentations (en tout trois cent quatre-vingt-quatre), confirment l'exactitude de l'équation

$$N[7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 384.$$

Enfin, la formule (1) donne

$$N[9 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 584;$$

et ce résultat aussi est vérifié par les identités

$$\begin{aligned}
9 &= 3^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),\\
9 &= 1^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),\\
9 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2(1^2 + 0^2),\\
9 &= 1^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2),\\
9 &= 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(2^2 + 0^2).
\end{aligned}$$

Elles fournissent en effet respectivement, pour l'entier 9, huit, quatre-vingt-seize, deux cent cinquante-six, cent quatre-vingt-douze, et trente-deux représentations; or

$$8 + 96 + 256 + 192 + 32 = 584.$$

5. Vérifions à son tour la formule (2),

$$N\left[2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right] = 4\left[2^{2\alpha+1} - \left(\frac{-1}{m}\right)\right]\rho_2(m),$$

où l'on doit prendre $\alpha > 0$.

Soit d'abord $\alpha = 1$, avec $m = 1$. Cette formule donne

$$N[2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 28,$$

ce qui est confirmé par les identités

$$2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2)$$

et

$$2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 0^2).$$

En y affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en y opérant les permutations convenables, on en tire respectivement vingt-quatre, puis quatre représentations de l'entier 2 ; or

$$24 + 4 = 28.$$

Soit ensuite $\alpha = 1$, mais $m = 3$. La formule (2) nous donnera

$$N[6 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 288.$$

On vérifiera ce fait au moyen des identités

$$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),$$
$$6 = 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 0^2),$$
$$6 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2(1^2 + 0^2),$$
$$6 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2).$$

La première et la dernière de ces identités fournissent chacune quatre-vingt-seize représentations, la seconde en fournit trente-deux et la troisième soixante-quatre : le total est bien deux cent quatre-vingt-huit.

Avec $\alpha = 1$, prenons enfin $m = 5$. La formule (2) nous donnera

$$N(10 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 728;$$

et la vérification se tirera cette fois des identités

$$10 = 1^2 + 3^2 + 0^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),$$
$$10 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2(0^2 + 0^2),$$
$$10 = 2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 0^2),$$
$$10 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2),$$
$$10 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2(2^2 + 0^2),$$
$$10 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 2^2),$$

qui fournissent respectivement, pour l'entier 10, des nombres de re-

présentations marqués par 48, 96, 96, 384, 96, 8 : la somme est bien 728.

Passant aux nombres pairement pairs, bornons-nous à prendre $m = 1$, avec $\alpha = 2$, puis $\alpha = 3$. Nous aurons d'abord

$$N[4 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 124;$$

cela s'accorde avec les identités

$$\begin{aligned}
4 &= 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),\\
4 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2(0^2 + 0^2),\\
4 &= 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 0^2),\\
4 &= 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2).
\end{aligned}$$

Elles fournissent respectivement, pour l'entier 4, huit, seize, quatre-vingt-seize et enfin quatre représentations; or

$$8 + 16 + 96 + 4 = 124.$$

On a ensuite

$$N[8 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 508.$$

Or des identités

$$\begin{aligned}
8 &= 2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),\\
8 &= 1^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 + 2(1^2 + 0^2),\\
8 &= 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2),\\
8 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2(1^2 + 1^2),\\
8 &= 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(2^2 + 0^2),
\end{aligned}$$

on tire respectivement, pour l'entier 8, vingt-quatre, trois cent quatre-vingt-quatre, trente-deux, soixante-quatre et enfin quatre représentations, en tout cinq cent huit, comme l'indiquait notre formule, qui reste ainsi toujours vérifiée.

6. Jusqu'ici nous n'avons parlé que du nombre total

$$N[n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)]$$

des représentations propres ou impropres d'un entier donné n par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2).$$

Mais on peut désirer d'avoir séparément l'expression du nombre

$$M[n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)]$$

des représentations propres, pour lesquelles x, y, z, t, u, v n'admettent aucun facteur commun > 1. Cette seconde question est facile à résoudre, la première étant résolue.

Il faut continuer à poser

$$n = 2^\alpha m,$$

m étant un entier impair, mais considérer la fonction numérique

$$R_2(m)$$

au lieu de la fonction

$$\rho_2(m).$$

On devra de plus distinguer les quatre cas de $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha > 2$.

Quand $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impair, la formule est

$$(3) \qquad M[m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 8R_2(m).$$

Ainsi, ayant

$$R_2(9) = 9^2 - 3^2 = 72,$$

on en conclut que

$$M(9 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 576.$$

Or cette équation est exacte. On a vu plus haut, en effet, que le

nombre 9 comporte en tout cinq cent quatre-vingt-quatre représentations par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2);$$

mais ici nous devons exclure les huit représentations impropres que l'on déduit de l'identité

$$9 = (\pm 3)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),$$

en y faisant occuper successivement à

$$(\pm 3)^2$$

les quatre premières places.

Quand $\alpha = 1$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impairement pair, je trouve

$$(4)\quad \mathrm{M}[2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 4\left[8 - \left(\frac{-1}{m}\right)\right]\mathrm{R}_2(m).$$

Ici la valeur de m (mod. 4) a de l'influence.

Elle en garde encore dans le cas de $\alpha = 2$; car on a

$$(5)\quad \mathrm{M}[4m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 4\left[30 - \left(\frac{-1}{m}\right)\right]\mathrm{R}_2(m),$$

de sorte que

$$\left(\frac{-1}{m}\right)$$

continue à figurer au second membre.

Mais pour $\alpha > 2$, quel que soit d'ailleurs α, on obtient la formule

$$(6)\quad \mathrm{M}[2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 15.2^{2\alpha-1}\mathrm{R}_2(m),$$

d'où

$$\left(\frac{-1}{m}\right)$$

a disparu.

En faisant $m = 1$ dans l'équation (5), on en conclut que

$$\mathrm{M}[4 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2) = 116.$$

Or cette équation est exacte. On a vu plus haut que l'entier 4 comporte en tout cent vingt-quatre représentations par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2).$$

Mais huit de ces représentations sont impropres; ce sont celles que fournit l'identité

$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2),$$

en y faisant occuper successivement à

$$(\pm 2)^2$$

les quatre premières places. En les retranchant, il reste cent seize représentations propres.

Dans la formule (6), faisons $m = 1$, $\alpha = 3$; il nous viendra

$$\mathrm{M}[8 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 480,$$

résultat exact. Le nombre 8 est représenté, il est vrai, cinq cent huit fois par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2);$$

mais il y a vingt-huit représentations impropres, savoir, celles que fournissent les deux identités

$$8 = (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2)$$

et

$$8 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2[(\pm 2)^2 + 0^2],$$

en y opérant les permutations convenables.

7. Maintenant exigeons que, dans l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2),$$

x, y, z, t, u, v soient des entiers impairs et positifs, du reste quelconques, et demandons-nous quel sera, sous ces conditions nouvelles,

le nombre

$$\mathfrak{N}[n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)]$$

des solutions. Il est bien clair que l'on aura

$$\mathfrak{N}[n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 0$$

si n n'est pas un multiple de 8. Mais quelle est la valeur de

$$\mathfrak{N}\left[2^{\varepsilon+3}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right],$$

m étant un entier impair et ε étant égal ou supérieur à 0?

La réponse à cette question est fournie par la formule ci-après :

$$(7) \qquad \mathfrak{N}\left[2^{\varepsilon+3}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right] = 4^{\varepsilon}\rho_2(m),$$

$\rho_2(m)$ ayant la même signification qu'au n° 1.

Soit, par exemple, $m = 1$ avec $\varepsilon = 0$. La formule (7) nous donnera

$$\mathfrak{N}[8 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 1,$$

ce qui s'accorde avec l'équation

$$8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2(1^2 + 1^2),$$

la seule qu'on puisse écrire avec des valeurs de x, y, z, t, u, v impaires et positives.

En prenant $m = 1$, avec $\varepsilon = 1$, on trouve ensuite

$$\mathrm{N}[16 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)] = 4,$$

ce qui est confirmé par les identités

$$\begin{aligned}
16 &= 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2(1^2 + 1^2),\\
16 &= 1^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 2(1^2 + 1^2),\\
16 &= 1^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2 + 2(1^2 + 1^2),\\
16 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 2(1^2 + 1^2).
\end{aligned}$$

Maintenant, soit $\varepsilon = 0$, avec $m = 3$. On aura

$$\mathfrak{N}\,[24 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2\,(u^2 + v^2)] = 8,$$

résultat exact, comme le prouvent les identités

$$24 = 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 2\,(1^2 + 1^2)$$

et

$$24 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2\,(3^2 + 1^2),$$

où l'on devra effectuer les permutations convenables.

A l'hypothèse de

$$\varepsilon = 0, \quad m = 5$$

répond l'équation

$$\mathfrak{N}\,[40 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2\,(u^2 + v^2)] = 26,$$

que confirment les identités

$$40 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 2\,(1^2 + 1^2),$$
$$40 = 5^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 2\,(1^2 + 1^2),$$
$$40 = 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 2\,(3^2 + 1^2),$$
$$40 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2\,(3^2 + 3^2),$$

dont la seconde et la troisième comportent chacune douze permutations.

De même, à l'hypothèse de

$$\varepsilon = 0, \quad m = 7$$

répond l'égalité

$$\mathfrak{N}\,(56 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2\,(u^2 + v^2)] = 48,$$

qui se vérifie au moyen des équations identiques

$$56 = 5^2 + 5^2 + 1^2 + 1^2 + 2(1^2 + 1^2),$$
$$56 = 5^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 2(1^2 + 1^2),$$
$$56 = 7^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2(1^2 + 1^2),$$
$$56 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 2(1^2 + 3^2),$$
$$56 = 5^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 2(1^2 + 3^2),$$
$$56 = 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 2(3^2 + 3^2),$$
$$56 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2(5^2 + 1^2).$$

Les nombres de permutations que ces identités comportent sont respectivement

$$6,\ 4,\ 4,\ 2,\ 24,\ 6,\ 2;$$

or

$$6 + 4 + 4 + 2 + 24 + 6 + 2 = 48.$$

Soit encore $\varepsilon = 0$, mais $m = 9$. La formule (7) donne alors

$$\mathfrak{N}\,(72 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2\,(u^2 + v^2)] = 73.$$

Or on a les identités

$$72 = 5^2 + 5^2 + 3^2 + 3^2 + 2(1^2 + 1^2),$$
$$72 = 7^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 + 2(1^2 + 1^2),$$
$$72 = 5^2 + 5^2 + 1^2 + 1^2 + 2(3^2 + 1^2),$$
$$72 = 5^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 2(3^2 + 1^2),$$
$$72 = 7^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2(3^2 + 1^2),$$
$$72 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 2(3^2 + 3^2),$$
$$72 = 5^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 2(3^2 + 3^2),$$
$$72 = 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 2(5^2 + 1^2),$$
$$72 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2(5^2 + 3^2).$$

Les nombres de permutations convenables, en allant de la première

à la dernière, la sixième exceptée, sont

$$6,\ 12,\ 12,\ 8,\ 8,\ 12,\ 12,\ 2.$$

La somme

$$6 + 12 + 12 + 8 + 8 + 12 + 12 + 2$$

n'est égale qu'à soixante-douze. Mais on arrive à soixante-treize, en tenant compte de l'identité

$$7^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 2(3^2 + 3^2),$$

qui a été d'abord mise de côté.

8. Si à la condition imposée aux entiers x, y, z, t, u, v d'être impairs et positifs dans l'équation

$$2^{\varepsilon+3}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2),$$

on ajoutait celle de n'avoir pour commun diviseur que l'unité, le nombre des solutions de cette équation ne resterait égal à

$$4^{\varepsilon}\rho_2(m)$$

que si m n'avait aucun diviseur carré > 1, je veux dire si m n'était divisible par aucun carré supérieur à l'unité, autrement dit si m n'était le produit que de facteurs premiers inégaux. Dans tout autre cas, ce nombre se réduirait à

$$4^{\varepsilon}\,\mathrm{R}_2(m),$$

le symbole

$$\mathrm{R}_2(m)$$

ayant la même signification qu'au n° **1**.

En d'autres termes, si

$$\mathfrak{M}\left[2^{\varepsilon+3}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right]$$

désigne le nombre des solutions propres (impaires et positives) de l'équation

$$2^{\varepsilon+3}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2),$$

on aura

$$(8)\quad \mathfrak{M}\left[2^{\varepsilon+3}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right] = 4^{\varepsilon} R_2(m).$$

Ainsi, par exemple, en prenant

$$\varepsilon = 0, \quad m = 9,$$

on a

$$\mathfrak{M}\left[72 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)\right] = 72.$$

Cela est exact. Tout à l'heure, en effet, nous avons trouvé soixante-treize solutions de l'équation

$$72 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2);$$

mais l'une d'elles est impropre, savoir celle que fournit l'identité

$$72 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 2(3^2 + 3^2).$$

Toutes les autres solutions sont des solutions propres, et il n'y en a plus que soixante-douze, comme l'indique notre formule.

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2);$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Il s'agit de trouver une expression simple du nombre

$$N[n = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

des représentations d'un entier donné quelconque n par la forme à six variables

$$x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

c'est-à-dire du nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

dans laquelle x, y, z, t, u, v sont des entiers pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs.

En écrivant

$$n = 2^\alpha m,$$

m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro, on reconnaît que cette fois encore la réponse à la question proposée dépend surtout de la fonction numérique

$$\sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} d^2,$$

ou

$$\sum \left(\frac{-1}{\delta}\right) d^2,$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier

$$m = d\delta.$$

Nous continuerons à désigner cette fonction numérique par

$$\rho_2(m).$$

2. Supposons d'abord que l'on ait $\alpha = 0$, en sorte qu'on demande seulement

$$N[m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)].$$

Nous trouvons à ce sujet l'équation très-simple que voici :

$$(1) \qquad N[m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 4\rho_2(m).$$

Elle a lieu quelle que soit la valeur de m (mod. 4).

Au contraire, quand on s'occupe d'un entier $2^\alpha m$ pair, la valeur de m (mod. 4) a de l'influence. Dans l'hypothèse de $\alpha > 0$, on a en effet

$$(2) \quad N[2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 4\left[4^\alpha - \left(\frac{-1}{m}\right)\right]\rho_2(m).$$

Or le symbole

$$\left(\frac{-1}{m}\right)$$

qui figure dans l'équation (2) indique deux valeurs différentes, savoir 1 ou -1 suivant que m est de la forme $4l + 1$ ou de la forme $4l + 3$.

Observons en passant que la valeur de

$$N[2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)],$$

dans le cas d'un entier pair, pourrait être obtenue immédiatement en invoquant les résultats obtenus par Jacobi relativement à la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2.$$

Il est visible, en effet, que la valeur de

$$N[2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)],$$

α étant > 0, est égale à celle de

$$N(2^{\alpha-1}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2).$$

Cette dernière valeur étant connue, l'autre l'est donc.

Réciproquement, si l'on admet l'équation (2), il faudra en conclure, en posant $\alpha = \beta + 1$, que soit pour $\beta > 0$, soit même pour $\beta = 0$, on doit avoir

$$N(2^{\beta}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2) = 4\left[4^{\beta+1} - \left(\frac{-1}{m}\right)\right]\rho_2(m),$$

et cela résulte en effet des séries elliptiques de Jacobi.

5. Appliquons la formule (1),

$$N[m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 4\rho_2(m),$$

à quelques exemples.

Cette formule donne d'abord

$$N[1 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 4.$$

résultat confirmé par les identités

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2)$$

et

$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$

qui donnent, pour l'entier 1, quatre représentations sous la forme

$$x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2).$$

Elle donne ensuite

$$N[3 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 32.$$

Or l'identité

$$3 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 2[(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2]$$

fournit en effet trente-deux représentations de l'entier 3, quand on y effectue les permutations qu'elle comporte.

On a encore

$$N(5 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2) = 104.$$

Or les deux identités

$$5 = 1^2 + 2^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2)$$

et

$$5 = 1^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2)$$

fournissent l'une huit et l'autre quatre-vingt-seize représentations de l'entier 5, en affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations voulues : le total est bien cent quatre.

Les identités

$$7 = 1^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2)$$

et

$$7 = 1^2 + 2^2 + 2(1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2)$$

servent de même à vérifier l'exactitude de l'équation

$$N[7 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 192.$$

La première fournit cent vingt-huit représentations de l'entier 7, la seconde en donne soixante-quatre; or

$$128 + 64 = 192.$$

Enfin, il vient

$$N[9 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 292.$$

Ici la vérification se tire des quatre identités

$$9 = 3^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$
$$9 = 2^2 + 1^2 + 2(1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2),$$
$$9 = 1^2 + 0^2 + 2(2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$
$$9 = 1^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2).$$

Les nombres de représentations qu'elles fournissent sont respectivement

$$4,\ 192,\ 32,\ 64;$$

le total est bien deux cent quatre-vingt-douze.

4. Vérifions maintenant la formule (2), relative au cas de $\alpha > 0$.

$$\mathrm{N}\left[2^{\alpha} m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right] = 4\left[4^{\alpha} - \left(\frac{-1}{m}\right)\right]\rho_2(m).$$

En y prenant $m = 1$, avec $\alpha = 2$, cette formule donne

$$\mathrm{N}\left[2 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right] = 12,$$

résultat confirmé par les identités

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2)$$

et

$$2 = 0^2 + 0^2 + 2\left[(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2\right].$$

La première donne quatre représentations de l'entier 2; la seconde en fournit huit, en faisant occuper successivement à

$$(\pm 1)^2$$

les quatre places qui lui conviennent.

En prenant $m = 1$, avec $\alpha = 2$, on trouve ensuite

$$\mathrm{N}\left[4 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)\right] = 60.$$

Cela s'accorde avec les identités

$$4 = 2^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$
$$4 = 1^2 + 1^2 + 2(1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$
$$4 = 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2).$$

En affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations voulues, on tire de la première de

ces identités quatre représentations pour l'entier 4, trente-deux de la seconde, vingt-quatre de la troisième; or

$$4 + 32 + 24 = 60.$$

En continuant à prendre $m = 1$, mais avec $\alpha = 3$, on a

$$N[8 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 252.$$

Les identités à employer cette fois sont

$$\begin{aligned}
8 &= 2^2 + 2^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),\\
8 &= 2^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2),\\
8 &= 1^2 + 1^2 + 2(1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2),\\
8 &= 0^2 + 0^2 + 2(2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),\\
8 &= 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2).
\end{aligned}$$

Les nombres de représentations qu'elles fournissent respectivement, pour l'entier 8, sont

$$4,\ 96,\ 128,\ 8,\ 16;$$

or

$$4 + 96 + 128 + 8 + 16 = 252.$$

Soit enfin $m = 3$, avec $\alpha = 1$. Notre formule donnera

$$N[6 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 160.$$

Or des identités

$$\begin{aligned}
6 &= 2^2 + 0^2 + 2(1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),\\
6 &= 1^2 + 1^2 + 2(1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2),\\
6 &= 0^2 + 0^2 + 2(1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2),
\end{aligned}$$

on tire respectivement trente-deux, quatre-vingt-seize et encore trente-deux représentations pour l'entier 6. Le total fait bien cent soixante.

5. Jusqu'ici nous n'avons parlé que du nombre total

$$N[n = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

des solutions, tant propres qu'impropres, de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2).$$

Occupons nous maintenant du nombre

$$\mathrm{M}[n = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)]$$

des solutions propres.

En posant toujours $n = 2^\alpha m$ (m impair), il faudra alors substituer à la fonction $\rho_2(m)$ une autre fonction $\mathrm{R}_2(m)$ définie, au moyen des diviseurs premiers de l'entier m mis sous la forme

$$m = \prod (a^r),$$

par l'équation

$$\mathrm{R}_2(m) = \prod \left[a^{2r} + \left(\frac{-1}{a}\right) a^{2r-2}\right].$$

On distinguera d'ailleurs les quatre cas de $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha > 2$.

Pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire pour un entier impair, la formule est

$$(3) \qquad \mathrm{M}[m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 4\mathrm{R}_2(m).$$

Pour $\alpha = 1$, c'est-à-dire pour un entier impairement pair, elle devient

$$(4) \quad \mathrm{M}[2m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 4\left[4 - \left(\frac{-1}{m}\right)\right]\mathrm{R}_2(m),$$

en sorte que la valeur de m (mod. 4) y joue un rôle.

Même remarque pour le cas de $\alpha = 2$, la formule étant alors

$$(5) \quad \mathrm{M}[4m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 4\left[15 - \left(\frac{-1}{m}\right)\right]\mathrm{R}_2(m).$$

Mais il n'en est plus ainsi dans le cas de $\alpha > 2$. Pour ce cas la formule devient

$$(6) \quad \mathrm{M}[2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 15.4^{\alpha-1}\mathrm{R}_2(m),$$

et $\left(\frac{-1}{m}\right)$ n'y figure plus.

6. En faisant $m = 9$, la formule (3) donne

$$M[9 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2) = 288.$$

Cela est exact. On a trouvé plus haut deux cent quatre-vingt-douze représentations, pour l'entier 9, par la forme

$$x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2).$$

Mais ici on doit supprimer les quatre représentations impropres données par l'identité

$$9 = 3^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2);$$

le reste est bien deux cent quatre-vingt-huit.

En faisant $m = 1$ dans la formule (5), cette formule donne

$$M[4 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 56.$$

On avait obtenu soixante représentations, tant propres qu'impropres, de l'entier 4; mais il faut ici retrancher quatre représentations répondant à l'identité

$$4 = 2^2 + 0^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2);$$

de là le reste cinquante-six.

Faisons enfin $m = 1$, $\alpha = 3$; la formule (6) nous donnera

$$M[8 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)] = 240,$$

résultat exact; car du nombre total deux cent cinquante-deux des représentations de l'entier 8, il faut (quand on se borne aux représentations propres) retrancher douze unités répondant aux douze représentations impropres que fournissent les deux identités

$$8 = 2^2 + 2^2 + 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2)$$

et

$$8 = 0^2 + 0^2 + 2(2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2),$$

en sorte que le nombre des représentations propres n'est plus que deux cent quarante.

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

QUATORZIÈME ARTICLE.

1. Dans ce quatorzième article, comme dans le treizième (inséré au cahier précédent), je considère un nombre donné

$$m$$

de la forme $4\mu + 3$. Je le décompose d'abord de cette manière

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2m_3,$$

m_1, m_2, m_3 étant des entiers, savoir : m_1 impair, positif ou négatif; m_2 pair ou impair, positif, nul ou négatif; enfin m_3 impair et positif. Puis je fais

$$m_3 = d_3\,\delta_3,$$

d_3 et δ_3 étant, comme m_3, des entiers impairs et positifs. J'arrive ainsi à l'équation

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\,\delta_3,$$

qui marque le mode de partition du nombre m auquel se rattachent nos formules.

De chaque système

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ \delta_3$$

ainsi obtenu, on tire trois autres quantités que je désignerai par

$$x,\ y,\ z,$$

en faisant cette fois

$$x = \delta_3 - 2m_2,$$
$$y = d_3 + 2m_2 - m_1,$$

avec

$$z = \delta_3 + m_1.$$

Ce sont là les valeurs que j'emploierai sous le signe F, en représentant par

$$F(x, y, z)$$

une fonction impaire de x, y, z, c'est-à-dire une fonction remplissant les trois conditions générales

$$F(-x, y, z) = -F(x, y, z),$$
$$F(x, -y, z) = -F(x, y, z),$$
$$F(x, y, -z) = -F(x, y, z),$$

à quoi j'ajoute les deux conditions spéciales

$$F(x, 0, z) = 0, \quad F(x, y, 0) = 0,$$

relativement aux indéterminées y, z dont les valeurs sont des entiers pairs comprenant le zéro. Quant à x, c'est un entier essentiellement impair; on n'a donc pas à se préoccuper du cas de $x = 0$, qui ne peut pas avoir lieu.

Considérant à présent pour chaque système

$$m_1, \ m_2, \ d_3, \ \delta_3,$$

la valeur correspondante

$$F(x, y, z),$$

ou plutôt

$$F(\delta_3 - 2m_2, \ d_3 + 2m_2 - m_1, \ \delta_3 + m_1),$$

de notre fonction, je trouve que cette valeur est tantôt positive, tantôt négative, de telle façon que la somme algébrique est nulle pour

l'ensemble. C'est ce que j'exprime en disant que l'on a

$$(\mathrm{B}) \qquad \sum \mathrm{F}(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ \delta_3 + m_1) = 0,$$

pourvu que le signe

$$\sum$$

porte sur tous les systèmes

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ \delta_3.$$

Nous nous contenterons des deux exemples de

$$m = 3, \quad m = 7.$$

Pour $m = 3$, on n'a à écrire que deux équations

$$3 = 1^2 + 4.0^2 + 2.1.1,$$
$$3 = (-1)^2 + 4.0^2 + 2.1.1,$$

d'où résulte, pour le premier membre de la formule (B), une somme formée aussi de deux termes

$$\mathrm{F}(1, 0, 2) + \mathrm{F}(1, 2, 0),$$

qui tous les deux sont nuls puisqu'une des indéterminées y est égale à zéro sous le signe F. Pour $m = 7$, l'équation

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\delta_3$$

fournit huit équations particulières :

$$7 = 1^2 + 4.0^2 + 2.1.3,$$
$$7 = 1^2 + 4.0^2 + 2.3.1,$$
$$7 = (-1)^2 + 4.0^2 + 2.1.3,$$
$$7 = (-1)^2 + 4.0^2 + 2.3.1,$$
$$7 = 1^2 + 4.1^2 + 2.1.1,$$
$$7 = 1^2 + 4(-1)^2 + 2.1.1,$$
$$7 = (-1)^2 + 4.1^2 + 2.1.1,$$
$$7 = (-1)^2 + 4(-1)^2 + 2.1.1.$$

La somme des valeurs correspondantes de

$$F(x, y, z)$$

est donc composée de huit termes

$$F(3, 0, 4) + F(1, 2, 2) + F(3, 2, 2) + F(1, 4, 0) + F(-1, 2, 2)$$
$$+ F(3, -2, 2) + F(-1, 4, 0) + F(3, 0, 0).$$

Or quatre de ces termes sont nuls, puisqu'une des variables y est égale à zéro sous le signe F; et les quatre autres se détruisent deux à deux, puisque par la nature de la fonction F on a

$$F(-1, 2, 2) = -F(1, 2, 2)$$

et

$$F(3, -2, 2) = -F(3, 2, 2).$$

2. La formule

$$\text{(B)} \qquad \sum F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ \delta_3 + m_1) = 0$$

que nous venons de poser et la formule

$$\text{(A)} \qquad \sum F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1) = 0$$

de notre treizième article sont comprises dans une formule que nous allons maintenant faire connaître et qui contient une fonction de quatre variables.

C'est toujours un entier

$$m$$

de la forme

$$4\mu + 3$$

que nous considérons, en continuant à le soumettre au mode de partition marqué par l'équation

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\delta_3;$$

on se souvient que d_3 et δ_3 sont impairs et positifs, m_1 impair de signe quelconque, enfin m_2 pair ou impair, positif, nul ou négatif.

De chaque système

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ \delta_3,$$

on tire quatre quantités

$$x,\ y,\ z,\ t,$$

savoir :

$$\begin{aligned} x &= \delta_3 - 2m_2, \\ y &= d_3 + 2m_2 - m_1, \\ z &= d_3 + 2m_2 + m_1, \\ t &= \delta_3 + m_1. \end{aligned}$$

Telles seront ici les variables x, y, z, t à employer sous un signe de fonction :

$$\mathcal{F}(x, y, z, t).$$

Mais il faut définir cette fonction que nous voulons introduire et préciser les conditions auxquelles elle devra satisfaire.

D'abord, il faut qu'elle soit impaire par rapport à x et par rapport à y; en d'autres termes, il faut que si, x, y, z, t désignant un des systèmes de valeurs de nos variables, il y en a un autre pour lequel la première ou la seconde variable ait seulement changé de signe, la fonction elle-même n'ait fait aussi que changer de signe, en sorte que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(-x, y, z, t) &= -\mathcal{F}(x, y, z, t), \\ \mathcal{F}(x, -y, z, t) &= -\mathcal{F}(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Pour $y = 0$, nous ajouterons, comme à l'ordinaire, la condition spéciale

$$\mathcal{F}(x, 0, z, t) = 0;$$

mais nous n'avons rien à exiger de la valeur de

$$\mathcal{F}(0, y, z, t),$$

puisqu'on ne peut pas avoir $x = 0$.

Il faut ensuite (et ici je hasarde une locution nouvelle) que la fonc-

tion

$$\mathcal{F}(x, y, z, t)$$

soit impaire par rapport au groupe des deux variables z, t; je veux dire que si le système x, y, z, t coexiste avec un autre système x, y, $-z$, $-t$, où les deux dernières variables ont changé *à la fois* de signe, on devra avoir

$$\mathcal{F}(x, y, -z, -t) = -\mathcal{F}(x, y, z, t).$$

Si l'on a $z = 0$ sans avoir $t = 0$, ou bien $t = 0$ sans $z = 0$, cette équation de condition prendra la forme

$$\mathcal{F}(x, y, 0, -t) = -\mathcal{F}(x, y, 0, t),$$

ou bien la forme

$$\mathcal{F}(x, y, -z, 0) = -\mathcal{F}(x, y, z, 0).$$

Mais il faut prévoir aussi le cas où l'on aurait en même temps $z = 0$ et $t = 0$; alors nous demandons naturellement que

$$\mathcal{F}(x, y, 0, 0) = 0.$$

Sous les conditions que je viens d'énumérer, on aura toujours

$$(\mathrm{C}) \quad \sum \mathcal{F}(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1,\ \delta_3 + m_1) = 0,$$

le signe

$$\sum$$

portant sur tous les systèmes

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ \delta_3.$$

Cette formule remarquable est l'objet principal de notre quatorzième article.

Nous nous bornerons à vérifier la formule (C) dans le cas de

$$m = 7.$$

Alors la somme qu'on doit trouver égale à zéro est la suivante :

$$\mathcal{F}(3, 0, 2, 4) + \mathcal{F}(1, 2, 4, 2) + \mathcal{F}(3, 2, 0, 2) + \mathcal{F}(1, 4, 2, 0)$$
$$+ \mathcal{F}(-1, 2, 4, 2) + \mathcal{F}(3, -2, 0, 2) + \mathcal{F}(-1, 4, 2, 0) + \mathcal{F}(3, 0, -2, 0).$$

Or les deux termes

$$\mathcal{F}(3, 0, 2, 4), \quad \mathcal{F}(3, 0, -2, 0)$$

sont égaux à zéro, puisque pour eux la valeur de y est égale à zéro. Les six autres se détruisent deux à deux, attendu que l'on doit avoir

$$\mathcal{F}(-1, 2, 4, 2) = -\mathcal{F}(1, 2, 4, 2), \quad \mathcal{F}(-1, 4, 2, 0) = -\mathcal{F}(1, 4, 2, 0),$$

d'après la condition relative au changement de signe pour la variable x; puis

$$\mathcal{F}(3, -2, 0, 2) = -\mathcal{F}(3, 2, 0, 2),$$

d'après la condition relative au changement de signe pour la variable y. L'équation (C) est donc vérifiée.

5. On s'assurera aisément que les conditions imposées à la fonction

$$\mathcal{F}(x, y, z, t)$$

dans la formule

$$\text{(C)} \quad \sum \mathcal{F}(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1,\ \delta_3 + m_1) = 0$$

seront remplies si, en supposant cette fonction indépendante de t, on la réduit à une fonction impaire des trois autres variables, c'est-à-dire à une fonction

$$\mathrm{F}(x, y, z)$$

vérifiant les équations générales

$$\mathrm{F}(-x, y, z) = -\mathrm{F}(x, y, z),$$
$$\mathrm{F}(x, -y, z) = -\mathrm{F}(x, y, z),$$
$$\mathrm{F}(x, y, -z) = -\mathrm{F}(x, y, z)$$

et les équations particulières

$$F(x, 0, z) = 0, \quad F(x, y, 0) = 0.$$

Alors la formule (C) se changera dans la formule (A).

Elle se changera au contraire dans la formule (B), si l'on suppose la fonction

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t)$$

indépendante de z et réduite à une fonction impaire de x, y, t dont la valeur soit zéro quand y ou $t = 0$.

D'autres formules à trois variables pourraient se déduire de la formule (C); mais je n'insiste pas sur ces détails.

REMARQUE

SUR LE DÉVELOPPEMENT DE $\cos \operatorname{am} x$;

PAR M. HERMITE.

En développant suivant les puissances de l'argument les trois fonctions $\sin \operatorname{am} x$, $\cos \operatorname{am} x$, $\Delta \operatorname{am} x$, on obtient les séries suivantes :

$$\sin \operatorname{am} x = x - (1+k^2)\frac{x^3}{1.2.3} + (1+14k^2+k^4)\frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$\cos \operatorname{am} x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + (1+4k^2)\frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$\Delta \operatorname{am} x = 1 - k^2\frac{x^2}{1.2} + (k^4+4k^2)\frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

où le coefficient d'un terme quelconque, $\frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots 2n+1}$, $\frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}$, est une fonction entière et à coefficients entiers du module k^2. Mais jusqu'ici il n'a pas été possible d'en obtenir l'expression générale, et tout ce que l'on sait à leur égard résulte simplement des relations

$$\sin \operatorname{am}\left(kx, \frac{1}{k}\right) = k \sin \operatorname{am}(x, k), \quad \cos \operatorname{am}\left(kx, \frac{1}{k}\right) = \Delta \operatorname{am}(x, k).$$

On reconnaît ainsi que les coefficients de $\sin \operatorname{am} x$ sont des polynômes réciproques, et que le développement de $\cos \operatorname{am} x$ donne immédiatement celui de $\Delta \operatorname{am} x$. C'est de cette fonction, $\cos \operatorname{am} x$, que je vais m'occuper en ce moment, me proposant d'établir à l'égard des coefficients, dont voici les premiers d'après Gudermann :

$$1+4k^2,$$
$$1+44k^2+16k^4,$$
$$1+408k^2+912k^4+64k^6,$$
$$1+3688k^2+30768k^4+15808k^6+256k^8,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

la remarque suivante.

Posons $k = \cos\theta$ et introduisons les arcs multiples, au lieu des puissances du cosinus; en les multipliant chacun par k on trouvera successivement

$$k + 4k^3 = 4\cos\theta + \cos 3\theta,$$
$$k + 44k^3 + 16k^5 = 44\cos\theta + 16\cos 3\theta + \cos 5\theta,$$
$$k + 408k^3 + 912k^5 + 64k^7 = 912\cos\theta + 408\cos 3\theta + 64\cos 5\theta + \cos 7\theta,$$

. . . . . .

On aperçoit dans ces égalités que les puissances de k et les cosinus des multiples de θ ont précisément les mêmes coefficients. Or, en général, si l'on représente le coefficient de $\frac{x^{2n+2}}{1.2.3\ldots 2n+2}$ dans le développement de $\cos am x$ par

$$A_0 + A_1 k^2 + A_2 k^4 + \ldots + A_n k^{2n} = \sum_{i=0}^{n} A_i k^{2i},$$

on aura cette relation :

$$\sum A_i \cos^{2i+1}\theta = \sum A_i \cos(2n + 1 - 4i)\theta,$$

qu'on peut facilement démontrer, comme on verra. Mais je veux d'abord faire voir par un exemple comment elle sert à calculer directement les nombres entiers A_0, A_1, A_2, etc.

Soit $n = 4$: en faisant, pour simplifier, $A_i = 4^i a_i$, et posant $A_0 = 1$, on trouvera, en remplaçant par les arcs multiples les puissances du cosinus :

$$\begin{aligned}
&\cos\theta + 4a_1\cos^3\theta + 16a_2\cos^5\theta + 64a_3\cos^7\theta + 256a_4\cos^9\theta \\
&= \cos\theta + a_1(\cos 3\theta + 3\cos\theta) + a_2(\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta) \\
&+ a_3(\cos 7\theta + 7\cos 5\theta + 21\cos 3\theta + 35\cos\theta) \\
&+ a_4(\cos 9\theta + 9\cos 7\theta + 36\cos 5\theta + 84\cos 3\theta + 126\cos\theta).
\end{aligned}$$

On en conclut, entre les quatre inconnues, les cinq équations que voici :

$$1 = a_4,$$
$$4a_1 = a_2 + 7a_3 + 36a_4,$$

$$16a_2 = 1 + 3a_1 + 10a_2 + 35a_3 + 126a_4,$$
$$64a_3 = a_1 + 5a_2 + 21a_3 + 84a_4,$$
$$256a_4 = a_3 + 9a_4.$$

Leur somme conduisant à une identité, on peut omettre l'une d'elles, et si l'on exclut la troisième, un calcul facile donne :

$$a_1 = 922, \quad a_2 = 1923, \quad a_3 = 247, \quad a_4 = 1,$$

ce qui conduit en effet au coefficient rapporté plus haut, d'après Gudermann. Laissant de côté l'étude de ces équations considérées en général, et me bornant à remarquer les valeurs

$$A_n = 4^n,$$
$$A_{n-1} = 4^{2n+1} - (2n+1)4^{n-1},$$
$$A_1 = \frac{9^{n+1} - 9 - 8n}{16},$$

j'arrive à la démonstration de l'égalité

$$\sum A_i \cos^{2i+1}\theta = \sum A_i \cos(2n+1-4i)\theta,$$

et à cette occasion, comme j'aurai à faire usage de la transformation du second ordre, je vais donner diverses formules qui s'y rapportent, et qui peuvent être utiles dans bien d'autres circonstances.

La principale, celle dont toutes les autres peuvent être tirées, est

$$\sin \operatorname{am}\left[(1+k)x, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \frac{(1+k)\sin \operatorname{am} x}{1 + k \sin^2 \operatorname{am} x}.$$

Il suffit pour cela d'opérer tour à tour sur les fonctions au module primitif k, et au module transformé, en employant les relations de la transformation du premier ordre; on le démontre en partant de ce théorème arithmétique que tous les systèmes linéaires

$$\begin{Bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{Bmatrix},$$

dans lesquels $ad - bc$ est un nombre premier p, sont donnés par un

seul d'entre eux

$$\begin{Bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & p \end{Bmatrix}$$

en le composant à droite et à gauche avec des systèmes $\begin{Bmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{Bmatrix}$ au déterminant 1. Or l'ensemble des relations relatives à la transformation du premier ordre consiste dans ces formules, savoir :

$$\left\{\begin{aligned} \sin\operatorname{am}\left(kx, \frac{1}{k}\right) &= k\sin\operatorname{am}x, \\ \cos\operatorname{am}\left(kx, \frac{1}{k}\right) &= \Delta\operatorname{am}x, \\ \Delta\operatorname{am}\left(kx, \frac{1}{k}\right) &= \cos\operatorname{am}x. \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \sin\operatorname{am}(ix, k') &= \frac{i\sin\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x}, \\ \cos\operatorname{am}(ix, k') &= \frac{1}{\cos\operatorname{am}x}, \\ \Delta\operatorname{am}(ix, k') &= \frac{\Delta\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x}. \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \sin\operatorname{am}\left(ik'x, \frac{1}{k'}\right) &= \frac{ik'\sin\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x}, \\ \cos\operatorname{am}\left(ik'x, \frac{1}{k'}\right) &= \frac{\Delta\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x}, \\ \Delta\operatorname{am}\left(ik'x, \frac{1}{k'}\right) &= \frac{1}{\cos\operatorname{am}x}. \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \sin\operatorname{am}\left(ikx, \frac{ik'}{k}\right) &= \frac{ik\sin\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x}, \\ \cos\operatorname{am}\left(ikx, \frac{ik'}{k}\right) &= \frac{1}{\Delta\operatorname{am}x}, \\ \Delta\operatorname{am}\left(ikx, \frac{ik'}{k}\right) &= \frac{\cos\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x}. \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \sin\operatorname{am}\left(k'x, \frac{ik}{k'}\right) &= \frac{k'\sin\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x}, \\ \cos\operatorname{am}\left(k'x, \frac{ik}{k'}\right) &= \frac{\cos\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x}, \\ \Delta\operatorname{am}\left(k'x, \frac{ik}{k'}\right) &= \frac{1}{\Delta\operatorname{am}x}. \end{aligned}\right.$$

On en tire par un calcul facile, pour la transformation du second ordre, les formules suivantes :

$$\text{I.}\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}\left[(1+k)x, \dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \dfrac{(1+k)\sin\operatorname{am}x}{1+k\sin^2\operatorname{am}x}, \\ \cos\operatorname{am}\left[(1+k)x, \dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \dfrac{\cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x}{1+k\sin^2\operatorname{am}x}, \\ \Delta\operatorname{am}\left[(1+k)x, \dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \dfrac{1-k\sin^2\operatorname{am}x}{1+k\sin^2\operatorname{am}x}, \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}\left[(1+k')ix, \dfrac{2\sqrt{k'}}{1+k'}\right] = \dfrac{i(1+k')\sin\operatorname{am}x\cos\operatorname{am}x}{1-(1+k')\sin^2\operatorname{am}x}, \\ \cos\operatorname{am}\left[(1+k')ix, \dfrac{2\sqrt{k'}}{1+k'}\right] = \dfrac{\Delta\operatorname{am}x}{1-(1+k')\sin^2\operatorname{am}x}, \\ \Delta\operatorname{am}\left[(1+k')ix, \dfrac{2\sqrt{k'}}{1+k'}\right] = \dfrac{1-(1-k')\sin^2\operatorname{am}x}{1-(1+k')\sin^2\operatorname{am}x}. \end{cases}$$

$$\text{III}\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}\left[(k'+ik)x, \dfrac{2\sqrt{ikk'}}{k'+ik}\right] = \dfrac{(k'+ik)\sin\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x}{1-(k-ik')k\sin^2\operatorname{am}x}, \\ \cos\operatorname{am}\left[(k'+ik)x, \dfrac{2\sqrt{ikk'}}{k'+ik}\right] = \dfrac{\cos\operatorname{am}x}{1-(k-ik')k\sin^2\operatorname{am}x}, \\ \Delta\operatorname{am}\left[(k'+ik)x, \dfrac{2\sqrt{ikk'}}{k'+ik}\right] = \dfrac{1-(k+ik')k\sin^2\operatorname{am}x}{1-(k-ik')k\sin^2\operatorname{am}x}. \end{cases}$$

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}\left[(1+k)ix, \dfrac{1-k}{1+k}\right] = \dfrac{i(1+k)\sin\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x}; \\ \cos\operatorname{am}\left[(1+k)ix, \dfrac{1-k}{1+k}\right] = \dfrac{1+k\sin^2\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x}, \\ \Delta\operatorname{am}\left[(1+k)ix, \dfrac{1-k}{1+k}\right] = \dfrac{1-k\sin^2\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x}. \end{cases}$$

$$\text{V.}\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}\left[(1+k')x, \dfrac{1-k'}{1+k'}\right] = \dfrac{(1+k')\sin\operatorname{am}x\cos\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x}, \\ \cos\operatorname{am}\left[(1+k')x, \dfrac{1-k'}{1+k'}\right] = \dfrac{1-(1+k')\sin^2\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x}, \\ \Delta\operatorname{am}\left[(1+k')x, \dfrac{1-k'}{1+k'}\right] = \dfrac{1-(1-k')\sin^2\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x}. \end{cases}$$

$$\text{VI.}\quad \left\{\begin{aligned} \sin\operatorname{am}\left[(k-ik')x, \frac{k+ik'}{k-ik'}\right] &= \frac{(k-ik')\sin\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x},\\ \cos\operatorname{am}\left[(k-ik')x, \frac{k+ik'}{k-ik'}\right] &= \frac{1-(k-ik')k\sin^2\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x},\\ \Delta\operatorname{am}\left[(k-ik')x, \frac{k+ik'}{k-ik'}\right] &= \frac{1-(k+ik')k\sin^2\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x}. \end{aligned}\right.$$

J'omets d'écrire, pour abréger, toutes celles qui en résulteraient par le changement de signe de k ou k', et par le changement des modules transformés en leurs inverses, et ne conduiraient pas par conséquent à de nouvelles formes analytiques dans les seconds membres. C'est dans le dernier groupe que nous trouverons la relation conduisant à l'identité que nous voulons établir. En partant en effet de l'égalité

$$\cos\operatorname{am}\left[(k-ik')x, \frac{k+ik'}{k-ik'}\right] = \frac{1-(k-ik')k\sin^2\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x},$$

on en déduira, par le changement de signe de k',

$$\cos\operatorname{am}\left[(k+ik')x, \frac{k-ik'}{k+ik'}\right] = \frac{1-(k+ik')k\sin^2\operatorname{am}x}{\cos\operatorname{am}x},$$

d'où il sera facile de tirer

$$(k+ik')\cos\operatorname{am}\left[(k-ik')x, \frac{k+ik'}{k-ik'}\right] + (k-ik')\cos\operatorname{am}\left[(k+ik')x, \frac{k-ik'}{k+ik'}\right]$$
$$= 2k\cos\operatorname{am}x.$$

Or, en posant $k = \cos\theta$, cette égalité prendra cette forme

$$e^{i\theta}\cos\operatorname{am}\left(e^{-i\theta}x, e^{2i\theta}\right) + e^{-i\theta}\cos\operatorname{am}\left(e^{i\theta}x, e^{-2i\theta}\right) = 2\cos\theta\cos\operatorname{am}x,$$

et la relation que nous nous sommes proposé de démontrer en résulte évidemment, en comparant dans les deux membres les coefficients d'une même puissance de la variable.

Relativement à $\sin\operatorname{am}x$, ce serait une formule de la transformation du quatrième ordre qui donnerait une conséquence semblable. Par-

tant en effet de la relation suivante

$$\sin\operatorname{am}\left[\frac{i(1+\sqrt{k})^2 x}{2}, \frac{(1-\sqrt{k})^2}{(1+\sqrt{k})^2}\right] = \frac{i}{(1-\sqrt{k})^2}\,\frac{1-k\sin^2\operatorname{am}x-\cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x}{\sin\operatorname{am}x},$$

on en déduira aisément

$$(1-\sqrt{-k})^2\sin\operatorname{am}\left[\frac{i(1+\sqrt{-k})^2 x}{2}, \frac{(1-\sqrt{-k})^2}{(1+\sqrt{-k})^2}\right]$$
$$-(1-\sqrt{k})^2\sin\operatorname{am}\left[\frac{i(1+\sqrt{k})^2 x}{2}, \frac{(1-\sqrt{k})^2}{(1+\sqrt{k})^2}\right] = 2ik\sin\operatorname{am}x,$$

et on en tirera, pour la détermination des coefficients du développement de $\sin\operatorname{am}x$, des relations analogues aux précédentes, mais d'une forme un peu moins simple.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. BESGE;

PAR M. J. LIOUVILLE.

« . . . J'ai donné dans le temps une expression très-simple du nombre des représentations du double d'un entier impair m sous la forme d'une somme de douze carrés. En désignant, pour abréger, ce nombre par

$$N(2m),$$

on a

$$N(2m) = 264\zeta_5(m);$$

je représente à mon ordinaire par $\zeta_5(m)$ la somme des cinquièmes puissances des diviseurs de m. Le coefficient numérique 264 est naturellement égal à $N(2)$. Et en effet les représentations de l'entier 2 par une somme de douze carrés sont toutes fournies par l'identité

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2,$$

en y opérant les permutations convenables; leur nombre est donc égal à

$$4 \cdot \frac{11.12}{2},$$

ce qui fait précisément 264.

» La formule générale pour le cas d'un entier pair quelconque

$$2^\alpha m$$

n'est guère plus compliquée. Je trouve en effet que sous la seule condition de $\alpha > 0$, l'on a

$$N(2^\alpha m) = \frac{24}{31}(21 + 2^{5\alpha+1}.5)\zeta_5(m),$$

ce qui pour $\alpha = 1$ reproduit la formule ci-dessus.

» Pour $\alpha = 2$, le facteur qui multiplie

$$\zeta_5(m)$$

devient

$$\frac{24}{31}(21 + 2^{11}.5);$$

or on a

$$21 + 2^{11}.5 = 31 + 10(2^{10} - 1)$$

et

$$2^{10} - 1 = (2^5 - 1)(2^5 + 1) = 31.33.$$

Donc

$$N(4m) = 24.331.\zeta_5(m).$$

» Ainsi, en particulier,

$$N(4) = 24.331.$$

Ce résultat est exact. Les représentations de l'entier 4 sous la forme d'une somme de douze carrés sont effectivement fournies par les deux identités

$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$$

et

$$\begin{aligned} 4 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 \\ + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2, \end{aligned}$$

en y effectuant les permutations qu'elles comportent. Pour la première, le nombre des représentations est égal à 24; pour la seconde, il s'exprime par

$$16 \cdot \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4},$$

c'est-à-dire par

$$24.330.$$

De là, pour le total, 24.331; c'est ce qu'a donné notre formule.

» Pour $\alpha = 3$, vous trouverez sans peine

$$N(8m) = 24.10571.\zeta_5(m);$$

et ainsi de suite. Mais laissons là ces détails.

» La formule générale

$$N(2^\alpha m) = \frac{24}{31}(21 + 2^{5\alpha+1}.5)\,\zeta_5(m),$$

qui subsiste à partir de $\alpha = 1$, vous paraîtra sans doute assez remarquable. Mais le cas de $\alpha = 0$ reste exclu, et il semble toujours difficile d'obtenir quelque chose d'entièrement satisfaisant au sujet de la valeur de $N(m)$. »

SUR LA FORME

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Jacobi a prouvé le premier que tout entier n peut être représenté par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2,$$

et depuis j'ai fait voir que ce théorème n'est qu'une conséquence presque immédiate de celui que Lagrange a établi rigoureusement dans les Mémoires de l'Académie de Berlin au sujet de la représentation de n par une somme de quatre carrés. Il est en outre aisé de s'assurer qu'en modifiant très-légèrement la méthode que Lagrange a suivie pour la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

on étend cette méthode à d'autres formes, parmi lesquelles se trouve la forme indiquée

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2.$$

Mais jusqu'à présent, à ma connaissance du moins, personne n'a donné une expression simple du nombre

$$\mathrm{N}(n = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2,$$

dans le second membre de laquelle nous admettons, comme d'ordinaire, pour x, y, z, t des entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs. En

essayant aujourd'hui d'aborder cette question, je dois avertir que je n'ai réussi à la traiter complétement que dans le cas de n pair. Quand il s'agit d'un entier impair, je n'ai pu jusqu'ici trouver que deux limites (l'une inférieure, l'autre supérieure) du nombre demandé.

2. Considérons d'abord un entier n impairement pair, et pour mettre en évidence le facteur 3, s'il y est contenu, représentons cet entier par

$$2.3^{\beta}m,$$

m étant impair, premier à 3, et l'exposant β pouvant se réduire à zéro. Désignons d'ailleurs, suivant notre habitude, par

$$\zeta_1(m)$$

la somme des diviseurs de m. La valeur demandée de

$$N(2.3^{\beta}m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

s'obtiendra en multipliant

$$\zeta_1(m)$$

par le facteur

$$2(3^{\beta+1} - 2)$$

qui dépend de β.

Ainsi

$$(1) \quad N(2.3^{\beta}m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 2(3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m).$$

On remarquera, en passant, que le rapport de

$$N(2.3^{\beta}m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

à

$$N(2m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

est celui de

$$3^{\beta+1} - 2$$

à l'unité.

3. Appliquons la formule

$$(1)\qquad N(2.3^{\beta}m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 2(3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m)$$

à quelques exemples.

En y prenant $\beta = 0$, avec $m = 1$, elle donne

$$N(2 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 2,$$

résultat confirmé par l'identité

$$2 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6.0^2.$$

Pour $\beta = 0$, avec $m = 5$, elle donne

$$N(10 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 12.$$

Or il y a en effet douze représentations de l'entier 10 par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2,$$

comme le prouvent les deux identités

$$10 = (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2$$

et

$$10 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 6(\pm 1)^2.$$

Pour $\beta = 0$, avec $m = 7$, il vient

$$N(14 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 16.$$

Or les identités

$$14 = (\pm 3)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,$$
$$14 = 0^2 + 2(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2,$$
$$14 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 2)^2 + 6\ 0^2$$

montrent l'exactitude de ce résultat. La première fournit huit représentations de l'entier 4; chacune des deux autres en fournit quatre, et

$$8 + 2.4 = 16.$$

Soit à présent $\beta = 1$, avec $m = 1$. La formule (1) nous donnera

$$N(6 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 14.$$

Les identités qui fournissent les représentations sont ici :

$$\begin{aligned}
6 &= (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6.0^2,\\
6 &= (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,\\
6 &= 0^2 + 2.0^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2.
\end{aligned}$$

Elles conduisent au nombre indiqué, attendu que

$$4 + 8 + 2 = 14.$$

Pour dernier exemple, soit $\beta = 2$, avec $m = 1$. D'après la formule (1), on devra avoir

$$N(18 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 50.$$

La vérification se tire cette fois des identités

$$\begin{aligned}
18 &= 0^2 + 2(\pm 3)^2 + 3.0^2 + 6.0^2,\\
18 &= (\pm 4)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6.0^2,\\
18 &= (\pm 2)^2 + 2(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2,\\
18 &= (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 6(\pm 1)^2,\\
18 &= (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6(\pm 1)^2,\\
18 &= (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 2)^2 + 6.0^2,\\
18 &= 0^2 + 2.0^2 + 3(\pm 2)^2 + 6(\pm 1)^2.
\end{aligned}$$

Les nombres de représentations qui leur correspondent respectivement sont deux, quatre, huit, huit, seize, huit, quatre; et la somme

$$2 + 4 + 8 + 8 + 16 + 8 + 4$$

est précisément égale à 50.

4. Considérons maintenant un nombre pairement pair

$$2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant comme ci-dessus un entier impair, premier à 3, et l'exposant β pouvant se réduire à zéro, mais l'exposant α étant supérieur à l'unité. Dans cette hypothèse de

$$\alpha > 1,$$

je trouve

$$(2)\quad \mathrm{N}\left(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2\right) = 6\left(3^{\beta+1} - 2\right)\zeta_1(m).$$

Le facteur 2 de la formule (1) est remplacé, comme on voit, par le facteur 6. Il n'y a pas d'autre changement, et l'on doit observer que le rapport de

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2\right)$$

à

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2\right)$$

reste égal à celui de

$$3^{\beta+1} - 2$$

à l'unité, comme lorsqu'on prenait $\alpha = 1$. Ainsi, q désignant un entier *pair* et premier à 3, du reste quelconque, on obtient toujours la valeur de

$$\mathrm{N}\left(3^\beta q = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2\right)$$

en multipliant par

$$3^{\beta+1} - 2$$

celle de

$$\mathrm{N}\left(q = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2\right).$$

On verra plus tard comment cette relation se modifie quand il s'agit d'un nombre impair.

5. Vérifions la formule

$$(2)\quad \mathrm{N}\left(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2\right) = 6\left(3^{\beta+1} - 2\right)\zeta_1(m)$$

dans quelques cas particuliers, en supposant bien entendu $\alpha > 1$.

Pour $\alpha = 2$, avec $\beta = 0$ et $m = 1$, cette formule donne

$$N(4 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 6,$$

résultat confirmé par les deux identités

$$4 = (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 3.0^2 + 6.0^2$$

et

$$4 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2.$$

Pour $\alpha = 2$, avec $\beta = 1$ et $m = 1$, il vient

$$N(12 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 42.$$

Or les représentations de l'entier 12 par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2$$

sont contenues dans les identités

$$\begin{aligned}
12 &= (\pm 2)^2 + 2(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 6.0^2,\\
12 &= (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,\\
12 &= (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,\\
12 &= (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2,\\
12 &= (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6(\pm 1)^2,\\
12 &= 0^2 + 2.0^2 + 3(\pm 2)^2 + 6.0^2,
\end{aligned}$$

qui fournissent respectivement quatre, quatre, huit, huit, seize et deux représentations; la somme

$$4 + 4 + 8 + 8 + 16 + 2$$

étant égale à 42, la vérification cherchée a lieu.

Je terminerai en prenant $\alpha = 3$, avec $\beta = 0$ et $m = 1$. D'après la formule (2), on devra alors avoir

$$N(8 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 6;$$

et c'est ce qui résulte effectivement des deux identités

$$8 = 0^2 + 2(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 6.0^2$$

et

$$8 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2,$$

les seules qui puissent s'offrir ici.

6. Occupons-nous enfin du cas d'un nombre impair $3^\beta m$ (m impair et premier à 3). Je n'ai réussi, jusqu'à présent, comme je l'ai déjà dit, qu'à trouver pour

$$N(3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

deux limites, l'une inférieure, l'autre supérieure. Ces limites, telles qu'elles se présentent d'abord, seraient d'une part

$$\frac{2}{3}(3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m),$$

d'autre part

$$2(3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m)$$

Mais en s'en tenant là, on ne donnerait qu'une idée par trop insuffisante de ce que devient la valeur de

$$N(3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

quand l'exposant β grandit. Si nous n'avons pu mieux faire au sujet de la valeur de

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2),$$

pour laquelle la limite inférieure est

$$\frac{2}{3}\zeta_1(m)$$

et la limite supérieure

$$2\zeta_1(m),$$

nous montrerons du moins comment on passe de la valeur de

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

supposée connue à celle de

$$N(3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2).$$

De cette façon, l'influence de l'exposant β sera mise en pleine évidence.

7. Cherchons pour quelques nombres particuliers la valeur de

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

dont nous venons de fixer la limite inférieure à

$$\frac{2}{3}\zeta_1(m)$$

et la limite supérieure à

$$2\zeta_1(m).$$

L'identité

$$1 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 3.0^2 + 6.0^2$$

nous montre que

$$N(1 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 2.$$

Ici la limite supérieure est atteinte, puisque

$$2\zeta_1(1) = 2.$$

Au contraire, on conclut de l'identité

$$5 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,$$

de laquelle seule résultent les représentations de l'entier 5 par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2,$$

que

$$N(5 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 4.$$

Cette fois on descend jusqu'à la limite inférieure, puisque

$$\frac{2}{3}\zeta_1(5) = 4.$$

Des deux identités

$$7 = (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,$$
$$7 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2,$$

on conclut

$$N(7 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 8.$$

Ici on a

$$2\zeta_1(m) = 16, \quad \frac{2}{3}\zeta_1(m) = \frac{16}{3};$$

le nombre 8 est compris entre ces deux limites.

Soit, comme dernier exemple,

$$m = 11.$$

A cause des identités

$$11 = (\pm 3)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6.0^2,$$
$$11 = 0^2 + 2(\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,$$
$$11 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6(\pm 1)^2,$$

on a

$$N(11 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 16.$$

Or le nombre 16 est compris entre les limites 24 et 8, qu'indiquent les équations

$$2\zeta_1(11) = 24, \quad \frac{2}{3}\zeta_1(11) = 8.$$

8. Pour lier maintenant la valeur de

$$N(3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2),$$

où l'on suppose l'entier m impair et premier à 3, à celle de

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2),$$

la valeur de m étant la même, je mets en évidence la seule variable de la question, savoir β, et j'écris

$$N(3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = f(\beta),$$

en sorte que

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = f(0).$$

Cela posé, je trouve d'abord, entre $f(\beta)$ et $f(\beta+1)$, cette relation :

$$f(\beta+1) + f(\beta) = 4(3^{\beta+1} - 1)\zeta_1(m).$$

C'est une équation aux différences finies, très-facile à intégrer, et qui fournira $f(\beta)$, si l'on connaît $f(0)$. On en tire, en effet,

$$f(\beta) = (3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m) + (-1)^\beta[f(0) - \zeta_1(m)],$$

formule remarquable d'où résulte la solution complète du problème que nous avions en vue. Les principes sur lesquels nous nous fondons pour y arriver sont extrêmement simples et d'une grande portée.

9. Nous avons trouvé

$$N(1 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 2,$$

en sorte que, pour $m = 1$, l'on a

$$f(0) = 2.$$

La valeur générale de $f(\beta)$, pour $m = 1$, sera donc

$$f(\beta) = 3^{\beta+1} - 2 + (-1)^\beta.$$

En d'autres termes,

$$N(3^\beta = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 3^{\beta+1} - 2 + (-1)^\beta.$$

Quand on distingue le cas de β pair du cas de β impair, on a par conséquent

$$N(3^{2\gamma} = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 3^{2\gamma+1} - 1,$$

tandis que

$$N(3^{2\gamma+1} = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 3(3^{2\gamma+1} - 1),$$

valeur triple de la précédente si γ est le même de part et d'autre. Quant aux exemples numériques, je me contenterai d'observer que, d'après nos formules, on doit avoir

$$N(3 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 6$$

et

$$N(9 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 26;$$

or ces deux résultats sont confirmés par les deux groupes d'identités que voici :

$$3 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6.0^2,$$
$$3 = 0^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2$$

et

$$9 = (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 3.0^2 + 6.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 6.0^2,$$
$$9 = (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2,$$
$$9 = 0^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 6(\pm 1)^2.$$

Nous avons trouvé

$$N(5 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 4,$$

en sorte que, pour $m = 5$, on a

$$f(0) = 4.$$

La valeur générale de $f(\beta)$, pour $m = 5$, sera donc

$$f(\beta) = 6(3^{\beta+1} - 2) - 2(-1)^\beta.$$

En d'autres termes,

$$N(3^\beta . 5 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 6(3^{\beta+1} - 2) - 2(-1)^\beta.$$

Quand on distingue le cas de β pair du cas de β impair, on a par

conséquent

$$N(3^{2\gamma}.5 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 2(3^{2\gamma+2} - 7),$$

tandis que

$$N(3^{2\gamma+1}.5 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 2(3^{2\gamma+3} - 5).$$

Cette dernière formule donne, par exemple,

$$N(15 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 44.$$

Or les identités

$$\begin{aligned}
15 &= (\pm 2)^2 + 2(\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,\\
15 &= (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2,\\
15 &= (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2,\\
15 &= (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6(\pm 1)^2,\\
15 &= (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 2)^2 + 6.0^2
\end{aligned}$$

fournissent effectivement, pour l'entier 15, quarante-quatre représentations par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2,$$

attendu que

$$8 + 4 + 8 + 16 + 8 = 44.$$

Nous avons trouvé

$$N(7 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 8,$$

en sorte que, pour $m = 7$, on a $f(0) = 8$. La valeur générale de $f(\beta)$, pour $m = 7$, sera donc

$$f(\beta) = 8(3^{\beta+1} - 2).$$

En d'autres termes,

$$N(3^{\beta}.7 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 8(3^{\beta+1} - 2).$$

On a, par exemple,

$$N(21 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 56.$$

Ce résultat est confirmé par les identités

$$\begin{aligned}
21 &= 0^2 + 2(\pm 3)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,\\
21 &= (\pm 4)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,\\
21 &= (\pm 2)^2 + 2(\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6(\pm 1)^2,\\
21 &= (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 3(\pm 2)^2 + 6.0^2,\\
21 &= (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 3(\pm 2)^2 + 6.0^2,\\
21 &= (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 2)^2 + 6(\pm 1)^2,
\end{aligned}$$

attendu que

$$4 + 8 + 16 + 4 + 8 + 16 = 56.$$

Enfin, nous avons trouvé

$$N(11 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 16,$$

en sorte que, pour $m = 11$, on a $f(0) = 16$. La valeur générale de $f(\beta)$, pour $m = 11$, sera donc

$$f(\beta) = 12(3^{\beta+1} - 2) + 4(-1)^\beta.$$

Je ne pousserai pas plus loin ces détails.

10. En parlant des nombres pairs, nous avons vu que sous la seule condition de $\alpha > 0$, le rapport de

$$N(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

à

$$N(2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

est égal à celui de $3^{\beta+1} - 2$ à l'unité. L'équation

$$f(\beta) = (3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m) + (-1)^\beta[f(0) - \zeta_1(m)]$$

montre que ce rapport n'est plus celui de $f(\beta)$ à $f(0)$, c'est-à-dire de

$$N(3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

à

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2),$$

sauf pourtant si l'entier m est tel que l'on ait

$$f(0) = \zeta_1(m),$$

ce qui arrive pour $m = 7$, mais non pas pour $m = 1$, $m = 5$, $m = 11$. Quand la valeur de $f(0)$ n'est pas égale à $\zeta_1(m)$, le terme

$$(-1)^\beta [f(0) - \zeta_1(m)],$$

dont la valeur numérique est constante, introduit une sorte d'irrégularité tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre, suivant que l'exposant β est pair ou impair. Pour calculer ce terme exactement, il faudrait avoir la valeur exacte de $f(0)$. On peut cependant se faire une idée approchée du rôle qu'il joue à côté du terme

$$(3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m),$$

dont la valeur croît très-rapidement avec l'exposant β. En effet les limites de $f(0)$ étant

$$2\zeta_1(m), \quad \frac{2}{3}\zeta_1(m),$$

celles de

$$f(0) - \zeta_1(m)$$

sont

$$\zeta_1(m), \quad -\frac{1}{3}\zeta_1(m).$$

De là, pour $f(\beta)$, deux limites bien plus précises que celles du n° **6**.

SUR

QUELQUES FORMULES RELATIVES AU MODULE DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. HERMITE.

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LVII, séance du 21 décembre 1863.

Les expressions en produits infinis des fonctions elliptiques, savoir :

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots},$$

$$\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{2\sqrt[4]{q}\cos x(1+2q^2\cos 2x+q^4)(1+2q^4\cos 2x+q^8)(1+2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots},$$

$$\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\sqrt{k'}\,\frac{(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots},$$

donnent immédiatement, pour la racine quatrième du module et de son complément, des fonctions uniformes à l'égard de la variable ω définie en posant $q=e^{i\pi\omega}$. C'est ce qu'on voit dans les *Fundamenta*, § 36, où sont établies ces relations :

$$\sqrt[4]{k}=\sqrt{2}\,.\,\sqrt[8]{q}\,\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots};$$

$$\sqrt[4]{k'}=\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots},$$

ou encore sous forme entière

$$\sqrt[4]{k}=\sqrt{2}\,.\,\sqrt[8]{q}\,[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots]^2\,[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots],$$

$$\sqrt[4]{k'}=[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots][(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^2.$$

Mais cette conséquence importante ne résulte pas des développements sous forme de quotients de séries des mêmes fonctions, savoir :

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots}.$$

$$\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots},$$

$$\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{k'}\,\frac{1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots};$$

car c'est seulement alors la racine carrée du module et celle de son complément qui sont données en fonction de q par ces formules

$$\sqrt{k} = \frac{2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots},$$

$$\sqrt{k'} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots}.$$

Dans cette Note, je me propose d'établir, pour $\sin\operatorname{am}x$, $\cos\operatorname{am}x$, $\Delta\operatorname{am}x$, de nouveaux développements en série de sinus et de cosinus, analogues aux précédents, mais qui donneront aussi bien que les produits infinis les racines quatrièmes de k et k' comme fonctions uniformes de la variable ω. On en déduira, en effet, ces formules remarquables, où le signe $\sum$ s'étend à toutes les valeurs positives et négatives de n :

$$\sqrt[4]{k} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\sum q^{4n^2+2n}}{\sum q^{2n^2+n}}, \qquad \sqrt[4]{k'} = \frac{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}}{\sum q^{2n^2+n}},$$

$$\sqrt[4]{k} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\sum(-1)^n q^{2n^2+n}}{\sum(-1)^n q^{2n^2}}, \qquad \sqrt[4]{k'} = \frac{\sum(-1)^n q^{n^2}}{\sum(-1)^n q^{2n^2}},$$

$$\sqrt[4]{k} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\sum q^{2n^2+n}}{\sum q^{n^2}}, \qquad \sqrt[4]{k'} = \frac{\sum(-1)^n q^{2n^2}}{\sum q^{n^2}},$$

et auxquelles Jacobi est déjà parvenu dans son Mémoire intitulé : *Über unendliche Reihen, deren Exponenten zugleich in zwei werschiednen quadratischen Formen enthalten sind,* en les déduisant des produits infinis en q rapportés plus haut. Les propriétés si importantes auxquelles donnent lieu ces quantités $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt[4]{k'}$, lorsqu'on y remplace ω par $\frac{c+d\omega}{a+b\omega}$, a, b, c, d étant des nombres entiers assujettis à la condition $ad-bc=1$, résultent de ces formules, et peuvent être établies, comme j'espère le montrer, d'une manière simple et facile.

I. Pour abréger l'écriture, je conviendrai de désigner les quatre fonctions

$$\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right), \quad \Theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right), \quad \Pi\left(\frac{2Kx}{\pi}\right), \quad \Pi_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right),$$

par $\theta(x)$, $\theta_1(x)$, $\eta(x)$, $\eta_1(x)$, de sorte qu'on ait, en mettant en évidence la quantité ω dont il a été question tout à l'heure :

$$\begin{aligned}
\theta(x,\omega) &= 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots,\\
\theta_1(x,\omega) &= 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots,\\
\eta(x,\omega) &= 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \ldots,\\
\eta_1(x,\omega) &= 2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \ldots.
\end{aligned}$$

Cela posé, la transformation du second ordre donnera ces deux systèmes de relation :

$$\left\{\begin{aligned}
2\theta^2(x,\omega) &= \left[\sqrt{1+k}\;\theta\left(x,\frac{\omega}{2}\right) + \sqrt{1-k}\,\theta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right)\right]\sqrt{\frac{2K}{\pi}},\\
2\theta_1^2(x,\omega) &= \left[\sqrt{1+k}\,\theta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right) + \sqrt{1-k}\,\theta\left(x,\frac{\omega}{2}\right)\right]\sqrt{\frac{2K}{\pi}},\\
2\eta^2(x,\omega) &= \left[\sqrt{1+k}\;\theta\left(x,\frac{\omega}{2}\right) - \sqrt{1-k}\;\theta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right)\right]\sqrt{\frac{2K}{\pi}},\\
2\eta_1^2(x,\omega) &= \left[\sqrt{1+k}\,\theta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right) - \sqrt{1-k}\,\theta\left(x,\frac{\omega}{2}\right)\right]\sqrt{\frac{2K}{\pi}},
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\theta(x,\omega)\,\theta_1(x,\omega) &= \sqrt[4]{k'}\,\theta(2x,2\omega)\sqrt{\frac{2K}{\pi}},\\
\eta(x,\omega)\,\eta_1(x,\omega) &= \sqrt[4]{k'}\,\eta(2x,2\omega)\sqrt{\frac{2K}{\pi}},\\
\eta(x,\omega)\,\theta(x,\omega) &= \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{2}}\,\eta\left(x,\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{\frac{2K}{2}},\\
\eta_1(x,\omega)\,\theta_1(x,\omega) &= \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{2}}\,\eta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{\frac{2K}{\pi}},\\
\eta(x,\omega)\,\theta_1(x,\omega) &= \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}\sqrt[4]{kk'}}{\sqrt{2}}\,\eta\left(x,\frac{\omega+1}{2}\right)\sqrt{\frac{2K}{\pi}},\\
\eta_1(x,\omega)\,\theta(x,\omega) &= \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}\sqrt[4]{kk'}}{\sqrt{2}}\,\eta_1\left(x,\frac{\omega+1}{2}\right)\sqrt{\frac{2K}{\pi}};
\end{aligned}\right.$$

et c'est le second dont je vais faire usage comme il suit :

Considérons, par exemple, le sinus d'amplitude : on aura

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\eta(x,\omega)}{\theta(x,\omega)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\eta(x,\omega)\,\theta_1(x,\omega)}{\theta(x,\omega)\,\theta_1(x,\omega)}.$$

Or, en employant la première et la cinquième de ces relations, on obtiendra de suite

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{k}}\cdot\frac{\eta\left(x,\frac{\omega+1}{2}\right)}{\theta(2x,2\omega)},$$

ou bien, $$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{k}}\,\frac{\sqrt[8]{q}\sin x + \sqrt[8]{q^9}\sin 3x - \sqrt[8]{q^{25}}\sin 5x - \ldots}{1 - 2q^2\cos 4x + 2q^8\cos 8x - 2q^{18}\cos 12x + \ldots},$$

et le même procédé de transformation, appliqué à $\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$ et $\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$, donnera les résultats que voici

$$\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} &= \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{k}}\,\frac{\eta\left(x,\frac{\omega+1}{2}\right)}{\theta(2x,2\omega)} = \frac{1}{\sqrt[4]{k}}\,\frac{\sqrt{2}\sqrt[8]{q}\sum(-1)^n q^{2n^2+n}\sin(4n+1)x}{\sum(-1)^n q^{2n^2}\cos 4nx},\\
\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{k'}{k}}\,\frac{\eta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right)}{\theta(2x,2\omega)} = \sqrt[4]{\frac{k'}{k}}\,\frac{\sqrt{2}\sqrt[8]{q}\sum q^{2n^2+n}\cos(4n+1)x}{\sum(-1)^n q^{2n^2}\cos 4nx},\\
\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} &= e^{\frac{i\pi}{8}}\sqrt[4]{k'}\,\frac{\eta_1\left(x,\frac{\omega}{2}\right)}{\eta_1\left(x,\frac{\omega+1}{2}\right)} = \sqrt[4]{k'}\,\frac{\sum q^{2n^2+n}\cos(4n+1)x}{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}\cos(4n+1)x},
\end{aligned}\right.$$

et, en second lieu,

$$\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} &= \frac{\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt[4]{k^3}}\,\frac{\eta(2x,\ 2\omega)}{\eta_1\left(x,\ \frac{\omega+1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt[4]{k^3}}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt[8]{q^3}\sum q^{8n^2+4n}\sin(8n+2)x}{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}\cos(4n+1)x},\\
\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} &= \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{k'^3}{k^3}}\,\frac{\eta(2x,\ 2\omega)}{\eta\left(x,\ \frac{\omega}{2}\right)} = \sqrt[4]{\frac{k'^3}{k^3}}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt[8]{q^3}\sum q^{8n^2+4n}\sin(8n+2)x}{\sum q^{2n^2+n}\sin(4n+1)x},\\
\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} &= e^{-\frac{i\pi}{8}}\,\sqrt[4]{k'^3}\,\frac{\eta\left(x,\ \frac{\omega+1}{2}\right)}{\eta\left(x,\ \frac{\omega}{2}\right)} = \sqrt[4]{k'^3}\,\frac{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}\sin(4n+1)x}{\sum q^{2n^2+n}\sin(4n+1)x}.
\end{aligned}\right.$$

Tels sont donc les modes nouveaux de développements des fonctions elliptiques, qui manifestent immédiatement que les quantités $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt[4]{k'}$ sont des fonctions uniformes de ω. Il suffit en effet de poser $x = 0$ dans les deux dernières équations du premier groupe pour obtenir

$$\sqrt[4]{k} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{2}}\,\frac{\eta_1\left(0,\ \frac{\omega+1}{2}\right)}{\theta(0,\ 2\omega)} = \frac{\sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\sum(-1)^n q^{2n^2+n}}{\sum(-1)^n q^{2n^2}},$$

$$\sqrt[4]{k'} = e^{-\frac{i\pi}{8}}\,\frac{\eta_1\left(0,\ \frac{\omega+1}{2}\right)}{\eta_1\left(0,\ \frac{\omega}{2}\right)} = \frac{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}}{\sum q^{2n^2+n}},$$

c'est-à-dire deux des formules rapportées plus haut d'après Jacobi, et dont les autres se tirent aisément, comme nous le verrons bientôt. Quant aux équations du second groupe, elles donneraient, en prenant le rapport des dérivées, deux termes pour $x = 0$,

$$\sqrt[4]{k^3} = \frac{\sqrt{8}\,\sqrt[8]{q^3}\sum(4n+1)q^{8n^2+4n}}{\sum(4n+1)(-1)^n q^{2n^2+n}},$$

$$\sqrt[4]{k'^3} = \frac{\sum(4n+1)q^{2n^2+n}}{\sum(4n+1)(-1)^n q^{2n^2+n}}.$$

les signes $\sum$ s'étendant, comme précédemment, aux valeurs positives et négatives de n.

Mais ces nouveaux développements n'ont pas seulement pour objet de conduire à ces conséquences, que je devais donner principalement en vue de l'étude des quantités $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt[4]{k'}$; j'en indiquerai encore un usage dans la question suivante :

II. La dérivée de $\sin \operatorname{am} x$ étant exprimée par

$$\sqrt{(1 - \sin^2 \operatorname{am} x)(1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} x)},$$

il est naturel de se demander si les combinaisons suivantes des facteurs du radical

$$\lambda(x, k) = \sqrt{(1 + \sin \operatorname{am} x)(1 + k \sin \operatorname{am} x)},$$
$$\lambda_1(x, k) = \sqrt{(1 + \sin \operatorname{am} x)(1 - k \sin \operatorname{am} x)},$$

représenteront aussi bien que

$$\cos \operatorname{am} x = \sqrt{1 - \sin^2 \operatorname{am} x} \quad \text{et} \quad \Delta \operatorname{am} x = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} x}$$

des fonctions uniformes de la variable. Or, en désignant par a une racine quelconque des équations $\lambda(x) = 0$, $\lambda_1(x) = 0$, on reconnaît aisément que les développements $\lambda(a + \varepsilon)$, $\lambda_1(a + \varepsilon)$ commencent par un terme proportionnel à ε, de sorte que d'après les principes connus [*] on peut assurer déjà que ces fonctions sont uniformes. On trouve en effet, par exemple,

$$\lambda(-K + \varepsilon) = \sqrt{1 + k}\,\frac{\sqrt{1 - k \sin^2 \operatorname{am} \varepsilon} - \cos \operatorname{am} \varepsilon\, \Delta \operatorname{am} \varepsilon}{\Delta \operatorname{am} \varepsilon},$$

et la quantité sous le radical est une fonction paire de ε, qui s'annule avec cette variable. Mais il reste à trouver leur expression analytique, et on y parvient d'un manière facile comme il suit.

Changeons k en $\frac{1 - k'}{1 + k'}$ et x en $(1 + k')x$, en employant la formule

$$\sin \operatorname{am}\left[(1 + k')x, \frac{1 - k'}{1 + k'}\right] = \frac{(1 + k') \sin \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} x}{\Delta \operatorname{am} x},$$

[*] *Voyez* l'ouvrage de MM. Briot et Bouquet sur les fonctions doublement périodiques.

on trouvera

$$\lambda\left[(1+k')x, \frac{1-k'}{1+k'}\right]$$
$$= \frac{1}{\Delta \operatorname{am} x}\sqrt{1-k^2\sin^4\operatorname{am}x + 2\sin\operatorname{am}x\cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x},$$
$$\lambda_1\left[(1+k')x, \frac{1-k'}{1+k'}\right]$$
$$= \frac{1}{\Delta \operatorname{am} x}\sqrt{1-2k^2\sin^2\operatorname{am}x + k^2\sin^4\operatorname{am}x + 2k'\sin\operatorname{am}x\cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x}.$$

Or il arrive que les quantités sous les deux radicaux sont des carrés parfaits, à savoir :

$$(\cos\operatorname{am}x + \sin\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x)^2 \quad \text{et} \quad (k'\sin\operatorname{am}x + \cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x)^2$$

de sorte qu'il vient simplement

$$\lambda\left[(1+k')x, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \sin\operatorname{am}x + \frac{\cos\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x} = \sin\operatorname{am}x + \sin\operatorname{coam}x,$$
$$\lambda_1\left[(1+k')x, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \cos\operatorname{am}x + \frac{k'\sin\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x} = \cos\operatorname{am}x + \cos\operatorname{coam}x.$$

Posons encore avec Jacobi $k^{(2)} = \frac{1-k'}{1+k'}$, $K^{(2)} = \frac{1+k'}{2}K$, ces quantités désignant ce que deviennent k et K par le changement de q en q^2 ou de ω en 2ω, et mettons $\frac{2Kx}{\pi}$ au lieu de x : on aura

$$\lambda\left[\frac{4K^{(2)}x}{\pi}, k^{(2)}\right] = \sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} + \sin\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi},$$
$$\lambda_1\left[\frac{4K^{(2)}x}{\pi}, k^{(2)}\right] = \cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} + \cos\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}.$$

C'est à ce moment que nous ferons remarquer l'avantage des nouvelles formules

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{k}}\cdot\frac{\eta\left(x, \frac{\omega+1}{2}\right)}{\theta(2x, 2\omega)}, \quad \cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{k'}{k'}}\cdot\frac{\eta_1\left(x, \frac{\omega}{2}\right)}{\theta(2x, 2\omega)},$$

car elles donnent, avec le même dénominateur,

$$\sin\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{k}}\cdot\frac{\eta_1\left(x, \frac{\omega+1}{2}\right)}{\theta(2x, 2\omega)}, \quad \cos\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{\eta\left(x, \frac{\omega}{2}\right)}{\theta(2x, 2\omega)},$$

de sorte qu'ayant, comme on le vérifie de suite,

$$\eta\left(x, \frac{\omega+1}{2}\right) + \eta_1\left(x, \frac{\omega+1}{2}\right) = \sqrt{2}.e^{\frac{i\pi}{8}}\,\eta_1\left(x - \frac{\pi}{4}, \frac{\omega}{2}\right),$$

$$\eta\left(x, \frac{\omega}{2}\right) + \eta_1\left(x, \frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{2}.e^{-\frac{i\pi}{8}}\,\eta_1\left(x - \frac{\pi}{4}, \frac{\omega+1}{2}\right),$$

on en conclut, en remplaçant x et ω par $\frac{x}{2}$ et $\frac{\omega}{2}$,

$$\lambda\left(\frac{2Kx}{\pi}, k\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{k_{\frac{1}{2}}}}\,\frac{\eta_1\left(\frac{2x-\pi}{4}, \frac{\omega}{4}\right)}{\theta(x, \omega)} = \frac{1}{\sqrt[4]{k_{\frac{1}{2}}}}\,\frac{2\sqrt[16]{q}\sum q^{\frac{2n^2+n}{2}}\cos(4n+1)\left(\frac{2x-\pi}{4}\right)}{\sum(-1)^n q^{n^2}\cos 2nx},$$

$$\lambda_1\left(\frac{2Kx}{\pi}, k\right) = e^{-\frac{i\pi}{8}}\sqrt[4]{\frac{k'_{\frac{1}{2}}}{k_{\frac{1}{2}}}}\,\frac{\eta_1\left(\frac{2x-\pi}{4}, \frac{\omega+2}{4}\right)}{\theta(x, \omega)}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{k'_{\frac{1}{2}}}{k_{\frac{1}{2}}}}\,\frac{2\sqrt[16]{q}\sum(-1)^n q^{\frac{2n^2+n}{2}}\cos(4n+1)\left(\frac{2x-\pi}{4}\right)}{\sum(-1)^n q^{n^2}\cos 2nx}.$$

Dans ces formules, $k_{\frac{1}{2}}$ et $k'_{\frac{1}{2}}$ désignent ce que deviennent le module et son complément par le changement de ω en $\frac{\omega}{2}$, et ont pour valeur

$$k_{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad k'_{\frac{1}{2}} = \frac{1-k}{1+k}.$$

Sous forme de séries simples, on aurait

$$\lambda\left(\frac{2Kx}{\pi} + K, k\right) = \frac{\pi\sqrt{2}\sqrt[4]{q}}{K\sqrt{k}}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\frac{q^n\cos(4n+1)x}{1-q^{2n+\frac{1}{2}}},$$

$$\lambda_1\left(\frac{2Kx}{\pi} + K, k\right) = \frac{\pi\sqrt{2}\sqrt[4]{q}}{K\sqrt{k}}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\frac{q^n\cos(4n+1)x}{1+q^{2n+\frac{1}{2}}}.$$

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

QUINZIÈME ARTICLE.

1. Soit m un nombre impair donné. Posons de toutes les manières possibles

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2^{\alpha_3+1} m_3,$$

m_1, m_2, m_3 étant des entiers : savoir m_1 impair, positif ou négatif; m_2 pair ou impair, positif, nul ou négatif; enfin m_3 impair et positif. Puis décomposons m_3 en un produit de deux facteurs conjugués d_3, δ_3 de manière que l'on ait

$$m_3 = d_3 \delta_3,$$

d_3 et δ_3 étant, comme m_3, des entiers impairs et positifs. L'expression de m deviendra

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2^{\alpha_3+1} d_3 \delta_3.$$

Elle indique pour le nombre m un mode de partition qui servira de base à toutes les formules contenues dans cet article.

Nous n'avons rien dit jusqu'ici de l'exposant α_3; mais il est clair que l'on a

$$\alpha_3 = 0$$

quand m est de la forme

$$4\mu + 3,$$

tandis que l'on a au contraire

$$\alpha_3 > 0$$

quand m est de la forme

$$4\mu + 1.$$

Ajoutons que dans ce dernier cas la valeur de α_3 peut être plus ou moins grande; pour un même nombre m, elle peut prendre différentes valeurs dans les équations particulières dont l'équation

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2^{\alpha_3+1} d_3 \delta_3$$

est le type général.

Dans le cas de

$$m = 4\mu + 3,$$

où $\alpha_3 = 0$, on retombe sur l'équation

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2d_3\delta_3$$

que nous avons considérée dans nos articles treizième et quatorzième. Aussi avons-nous surtout en vue dans ce moment le cas de

$$m = 4\mu + 1.$$

L'unité seule est exclue; car pour $m = 1$, notre équation fondamentale est évidemment impossible.

2. Pour éviter toute obscurité, expliquons nettement ici une fois pour toutes le sens que nous attachons, dans ce genre de recherches, au mot *fonction* d'une ou de plusieurs variables x, y, etc; ce que c'est pour nous qu'une fonction *paire* ou *impaire* par rapport à une variable; ce que c'est aussi qu'une fonction *paire* ou *impaire par rapport à un groupe de deux ou de plusieurs variables*, locution que nous avons hasardée récemment et qui mérite à notre avis d'être adoptée.

Dans cet article, comme dans ceux qui ont précédé, nos variables

$$x, \ y, \ \text{etc.}$$

seront des entiers susceptibles seulement de certains systèmes de valeurs, et nous entendons par fonction de ces variables une quantité

qui correspond à ces systèmes en variant ou du moins pouvant varier d'un système à l'autre. Nous désignons cette quantité par un des signes ordinaires de fonction, par

$$\mathcal{F}(x, y, \ldots)$$

si l'on veut. Mais il ne s'agit pas ici de fonctions analytiques; il s'agit de fonctions purement numériques, dont les valeurs ne répondent qu'à des groupes distincts de valeurs des variables, sans qu'on ait à y mêler aucune idée de continuité. Ce n'est pas que nous voulions exclure les fonctions analytiques. Nous employons souvent ces fonctions, mais nous pouvons aussi en employer d'autres. Il y a toujours pour nous une infinité de fonctions qui peuvent indifféremment servir à un même objet et que dès lors nous regardons comme équivalentes relativement au but que nous poursuivons, si distinctes qu'elles soient d'ailleurs.

Que la variable x ne puisse par exemple être égale qu'à un entier impair; alors la fonction analytique et continue

$$\sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)$$

sera pour nous complétement équivalente à l'expression

$$(-1)^{\frac{x-1}{2}}$$

qui au point de vue ordinaire en diffère tout à fait. Et on pourrait encore la remplacer par l'expression purement symbolique

$$\left(\frac{-1}{x}\right)$$

prise dans le sens étendu que lui attribue Jacobi.

Admettons que la variable x existe seule et qu'il s'agisse d'une fonction

$$\mathcal{F}(x)$$

de cette variable. La fonction

$$\mathcal{F}(x)$$

sera parfaitement définie à nos yeux, si pour les diverses valeurs dont x est susceptible on nous dit quelle sera la valeur de $\mathcal{F}(x)$. Qu'il y ait, par exemple, six valeurs de x, comme

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = -1, \quad x = 3, \quad x = 5, \quad x = -5,$$

et qu'on nous donne

$$\mathcal{F}(0), \ \mathcal{F}(1), \ \mathcal{F}(-1), \ \mathcal{F}(3), \ \mathcal{F}(5), \ \mathcal{F}(-5).$$

Cela suffira pour que nous connaissions la fonction $\mathcal{F}(x)$ autant qu'il le faut pour notre usage. L'interpolation fournirait, si on le voulait, une infinité de fonctions analytiques remplissant les conditions indiquées. On s'en servira, si cela est commode, ou bien on ne les recherchera pas : elles ne sont jamais indispensables.

Parmi les valeurs dont x est susceptible dans notre exemple, j'en vois deux, 1 et -1, puis deux autres, 5 et -5, qui ne diffèrent que par le signe. Si l'on a

$$\mathcal{F}(-1) = \mathcal{F}(1), \quad \mathcal{F}(-5) = \mathcal{F}(5),$$

la fonction $\mathcal{F}(x)$ sera *paire*. En général, une fonction $\mathcal{F}(x)$ est paire, si pour toutes les valeurs égales et de signes contraires (x et $-x$) que x peut prendre, on a

$$\mathcal{F}(-x) = \mathcal{F}(x).$$

Mais notez bien que dans le cas particulier cité et où l'on peut faire $x = 3$ sans pouvoir faire $x = -3$, je n'aurai pas à rechercher si l'on a, oui ou non,

$$\mathcal{F}(-3) = \mathcal{F}(3).$$

Puisque $\mathcal{F}(-3)$ ne se présentera pas, peu nous importe sa valeur.

C'est au caractère opposé

$$\mathcal{F}(-x) = -\mathcal{F}(x)$$

que se reconnaît une fonction *impaire*. Mais quand x peut prendre la

valeur 0, il est naturel et commode d'exiger en outre que

$$\mathcal{F}(0) = 0.$$

Dans l'exemple qui précède et où l'on admet la valeur $x = 0$, la fonction $\mathcal{F}(x)$ sera impaire si l'on a tout à la fois

$$\mathcal{F}(-1) = -\mathcal{F}(1), \quad \mathcal{F}(-5) = -\mathcal{F}(5),$$

et

$$\mathcal{F}(0) = 0.$$

Une fonction

$$\mathcal{F}(x, y, \ldots)$$

de plusieurs variables est parfaitement définie à nos yeux quand on en donne la valeur pour chacun des systèmes de valeurs dont x, y, etc., sont susceptibles. Elle est *paire* relativement à x quand deux valeurs égales et opposées pouvant appartenir à cette variable avec les mêmes valeurs des autres variables y, etc., on a toujours

$$\mathcal{F}(-x, y, \ldots) = \mathcal{F}(x, y, \ldots).$$

L'équation générale

$$\mathcal{F}(-x, y, \ldots) = -\mathcal{F}(x, y, \ldots)$$

indique au contraire une fonction *impaire*, mais sous la condition spéciale ajoutée par nous, que quand la valeur zéro se présente on ait

$$\mathcal{F}(0, y, \ldots) = 0.$$

Toutes ces remarques ont déjà été faites dans nos précédents articles; mais nous avons cru devoir les reproduire avec une certaine insistance afin de pouvoir dorénavant nous servir en toute sécurité de ces mots *fonction paire* ou *fonction impaire par rapport à une variable*, dont la signification restera clairement fixée. Avons-nous besoin d'ajouter qu'une fonction paire ou impaire par rapport à une variable x peut être aussi paire ou impaire par rapport à une autre variable y, si des conditions analogues à celles que nous venons d'indiquer pour x ont également lieu pour y. On peut donc parler d'une fonction im-

paire de x, y, z, c'est-à-dire d'une fonction impaire par rapport à chacune des variables x, y, z, sans sortir du cercle des définitions ci-dessus, que l'on doit regarder comme des définitions anciennes.

Mais on peut encore avoir à employer des fonctions *paires* ou *impaires* par rapport à un *groupe* de plusieurs variables x, y, etc.; et il fallait ici des définitions nouvelles que nous avons données pour la première fois dans notre quatorzième article, car les variables ne sont plus considérées isolément et l'une après l'autre, mais au contraire simultanément. Nous dirons donc désormais (et ceci s'étend à des groupes de trois variables et au delà) qu'une fonction

$$\mathcal{F}(x, y, z, \ldots)$$

est *paire par rapport au groupe des deux variables* x, y, quand ces deux variables *à la fois* venant à changer de signes en conservant leurs valeurs numériques, tandis que les autres variables gardent leurs valeurs et leurs signes, la valeur de la fonction elle-même ne change aucunement, en sorte que

$$\mathcal{F}(-x, -y, z, \ldots) = \mathcal{F}(x, y, z, \ldots).$$

Au contraire la fonction serait *impaire* par rapport au groupe des deux variables x, y, si dans les mêmes conditions elle changeait de signe tout en conservant sa valeur numérique, c'est-à-dire si elle vérifiait l'équation

$$\mathcal{F}(-x, -y, z, \ldots) = -\mathcal{F}(x, y, z, \ldots),$$

qui devient

$$\mathcal{F}(0, -y, z, \ldots) = -\mathcal{F}(0, y, z, \ldots),$$

ou bien

$$\mathcal{F}(-x, 0, z, \ldots) = -\mathcal{F}(x, 0, z, \ldots),$$

quand on a $x = 0$, ou bien $y = 0$, et que nous complétons naturellement en écrivant que

$$\mathcal{F}(0, 0, z, \ldots) = 0,$$

quand on a en même temps $x = 0$ et $y = 0$.

Nous avons déjà eu dans notre quatorzième article et nous aurons plus bas occasion de parler d'une fonction $\mathcal{F}(x, y, z, t)$ impaire par

rapport à x, par rapport à y et par rapport au groupe z, t. Pour x et pour y, le mot *impaire* reste soumis à la définition ancienne; relativement au groupe z, t, c'est à la définition nouvelle qu'il faut se rattacher.

5. Revenant maintenant à l'équation

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2^{\alpha_3+1} d_3 \delta_3$$

du n° 1, je considère l'ensemble des équations particulières qu'elle contient, c'est-à-dire l'ensemble des systèmes

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ 2^{\alpha_3}\delta_3.$$

A chacun de ces systèmes répond un système de trois variables

$$x,\ y,\ z$$

que je définis par les équations

$$\begin{aligned} x &= 2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2, \\ y &= d_3 + 2m_2 - m_1, \\ z &= d_3 + 2m_2 + m_1. \end{aligned}$$

Si donc on considère une fonction

$$F(x, y, z)$$

de ces trois variables, la valeur de cette fonction pour les valeurs indiquées s'écrira

$$F(2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1).$$

Prenons la somme algébrique relativement à tous les systemes

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ 2^{\alpha_3}\delta_3,$$

et désignons-la par

$$P,$$

en sorte que

$$P = \sum F(2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1).$$

C'est à cette somme P, mais dans l'hypothèse d'une fonction

$$F(x, y, z)$$

impaire par rapport à chacune des trois variables x, y, z, que s'appliquera notre premier théorème.

Quand on prend

$$m = 4\mu + 3,$$

la somme P est égale à zéro. Même en prenant

$$m = 4\mu + 1,$$

on a encore

$$P = 0$$

si $2m$ n'est pas exprimable par la somme de deux carrés. Dans le cas contraire, P obtient une valeur qui peut différer de zéro : il s'agit de donner l'expression de cette valeur.

Soit

$$2m = \alpha^2 + \beta^2;$$

α et β seront naturellement des entiers impairs. Il pourra y avoir plusieurs équations de ce genre, et α, β pourraient y être affectés indifféremment du signe $\pm$; mais, d'une part, nous supposerons α positif et même $\alpha > 1$; d'autre part, nous affecterons β d'un signe tel, que l'entier

$$\frac{\alpha + \beta}{2}$$

soit impair. Cela posé, soit s un entier variable de 0 à $\frac{\alpha - 3}{2}$, en sorte que l'on ait successivement

$$s = 0, \quad s = 1, \quad s = 2, \ldots, \quad s = \frac{\alpha - 3}{2}.$$

Pour chaque couple

$$\alpha, \beta,$$

on donnera à s les valeurs indiquées et on formera la somme partielle

$$\sum F\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha-2s-1,\ \beta+2s+1\right)$$

où la fonction F est celle qui figure dans l'expression de P. Après quoi, faisant la somme de ces sommes partielles, on calculera la somme totale

$$\sum\left[\sum F\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha-2s-1,\ \beta+2s+1\right)\right],$$

pour tous les groupes (α, β). Cette somme totale sera la valeur de P.

Ainsi

$$P=\sum\left[\sum F\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha-2s-1,\ \beta+2s+1\right)\right],$$

ou bien, explicitement :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum F\left(2^{\alpha_3}\delta_3-2m_2,\quad d_3+2m_2-m_1,\quad d_3+2m_2+m_1\right)\\ &\quad=\sum\left[\sum F\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha-2s-1,\ \beta+2s+1\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Cette formule (1) est une extension à des entiers impairs quelconques de la formule (A) de notre treizième article qui ne s'appliquait qu'à des entiers $4\mu+3$.

Nous n'appliquerons la formule (1) qu'à quelques exemples, que nous ne développerons même pas complétement.

Pour

$$m=5,$$

l'équation

$$m=m_1^2+4m_2^2+2^{\alpha_3+1}d_3\delta_3$$

donne lieu aux deux équations particulières

$$5=1^2+4.0^2+4.1.1,$$
$$5=(-1)^2+4.0^2+4.1.1.$$

Le premier membre de l'équation (1) est donc

$$F(2, 0, 2) + F(2, 2, 0).$$

Il est donc nul par la nature même de la fonction impaire F qui est égale à zéro quand une des variables y est égale à zéro. Pour calculer le second membre, on considérera les représentations de l'entier 10 par une somme de deux carrés. La seule à employer ici sera

$$10 = 3^2 + (-1)^2;$$

car la racine du premier carré devant être positive et > 1, il faut mettre de côté les équations

$$10 = (-3)^2 + (\pm 1)^2,$$

et

$$10 = (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2.$$

L'équation

$$10 = 3^2 + 1^2$$

doit aussi être rejetée par la raison que

$$\frac{3+1}{2}$$

est un nombre pair. Il n'y a donc qu'un groupe α, β, savoir

$$\alpha = 3, \quad \beta = -1,$$

et il ne comporte pour s que la seule valeur

$$s = 0.$$

Le second membre de l'équation (1) se réduit donc a

$$F(2, 2, 0),$$

et il est nul comme le premier.

Pour

$$m = 9,$$

l'équation générale

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2^{\alpha_3+1} d_3 \delta_3$$

fournit six équations particulières contenues dans les deux identités

$$9 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 8.1.1$$

et

$$9 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 2)^2 + 4.1.1.$$

La valeur du premier membre se trouve nulle encore cette fois, eu égard à la nature de la fonction F. Quant au second membre, on ne doit employer pour le former que l'équation

$$18 = 3^2 + 3^2,$$

qui donne $\alpha = 3 = \beta$. Il est donc nul aussi, car on a généralement

$$F\left(\frac{\alpha - \beta}{2},\ \alpha - 2s - 1,\ \beta + 2s + 1\right) = 0$$

quand $\alpha = \beta$.

Mais pour

$$m = 13,$$

les deux membres de l'équation (1) ne sont plus nuls. Leur valeur commune est

$$F(2, 4, 2) + F(2, 2, 4),$$

ainsi qu'il est facile de s'en assurer.

4. Considérant toujours l'équation

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2^{\alpha_3} d_3 \delta_3$$

du n° 1, et une fonction

$$F(x, y, z)$$

impaire par rapport à chacune des trois variables

$$x,\ y,\ z,$$

je fais à présent

$$x = 2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2,$$

$$y = d_3 + 2m_2 - m_1,$$

mais

$$z = 2^{\alpha_3}\delta_3 + m_1,$$

puis je somme tous les termes

$$F\left(2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ 2^{\alpha_3}\delta_3 + m_1\right)$$

relatifs aux divers systèmes

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ 2^{\alpha_3}\delta_3,$$

et je désigne par Q le résultat de cette sommation, en sorte que

$$Q = \sum F\left(2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ 2^{\alpha_3}\delta_3 + m_1\right).$$

C'est sur la somme

$$Q$$

que portera notre second théorème.

Quand on prend

$$m = 4\mu + 3,$$

la somme Q est égale à zéro; c'est ce qu'exprime la formule (B) de notre quatorzième article. Même en prenant

$$m = 4\mu + 1,$$

on a encore

$$Q = 0$$

si $2m$ n'est pas exprimable par une somme de deux carrés. Dans le cas contraire, Q obtient une valeur qui peut différer de zéro et dont il s'agit de former l'expression.

Soit, comme au n° 5,

$$2m = \alpha^2 + \beta^2,$$

α étant un entier essentiellement positif et même > 1, et le signe de β étant fixé de telle sorte que l'entier

$$\frac{\alpha+\beta}{2}$$

soit impair. Pour chaque groupe possible

$$\alpha,\ \beta$$

cherchez la somme

$$\sum F\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha-2s-1,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

où le signe

$$\sum$$

porte sur la variable s dont les valeurs successives sont

$$0,\ 1,\ 2,\ldots,\ \frac{\alpha-3}{2};$$

puis de là passez à la somme totale

$$\sum\left[\sum F\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha-2s-1,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right],$$

pour tous les groupes α, β. Vous aurez ainsi la valeur de Q.

En d'autres termes, on a

$$Q=\sum\left[\sum F\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha-2s-1,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right],$$

ou bien, explicitement :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum F\left(2^{\alpha_3}\delta_3-2m_2,\ d_3+2m_2-m_1,\ 2^{\alpha_3}\delta_3+m_1\right)\\ &\quad=\sum\left[\sum F\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha-2s-1,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

La formule (2) généralise la formule (B) de notre quatorzième article, qui ne s'appliquait qu'aux entiers m de la forme $4\mu+3$.

5. Pour étendre à son tour à des entiers impairs quelconques la formule (C) de ce quatorzième article, il faut considérer une fonction

$$\mathcal{F}(x, y, z, t)$$

de quatre variables. Cette fonction

$$\mathcal{F}(x, y, z, t)$$

devra être impaire par rapport à chacune des deux variables x, y et par rapport au groupe des deux variables z, t.

Les valeurs des variables

$$x, \ y, \ z, \ t$$

continueront à être tirées du mode de partition du nombre impair m que fournit l'équation

$$m = m_1^2 + 4m_2^2 + 2^{\alpha_3+1} d_3 \delta_3$$

du n° **1**. Nous prendrons en effet

$$\begin{aligned} x &= 2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2, \\ y &= d_3 + 2m_2 - m_1, \\ z &= d_3 + 2m_2 + m_1, \\ t &= 2^{\alpha_3}\delta_3 + m_1. \end{aligned}$$

Puis faisant la somme des quantités

$$\mathcal{F}\left(2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2, \ d_3 + 2m_2 - m_1, \ d_3 + 2m_2 + m_1, \ 2^{\alpha_3}\delta_3 + m_1\right)$$

qui répondent successivement aux divers systèmes

$$m_1, \ m_2, \ d_3, \ 2^{\alpha_3}\delta_3,$$

nous désignerons par

le résultat de cette sommation, en sorte que

$$R = \sum \mathcal{F}\left(2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1,\ 2^{\alpha_3}\delta_3 + m_1\right).$$

C'est à cette somme R que s'appliquera notre nouveau théorème.

La somme R est nulle quand

$$m = 4\mu + 3,$$

et c'est ce qu'exprime la formule (C) de notre quatorzième article. Même pour

$$m = 4\mu + 1,$$

on a encore

$$R = 0,$$

si $2m$ n'est pas exprimable sous la forme d'une somme de deux carrés. Mais quand $2m$ est la somme de deux carrés, R obtient une valeur qui peut différer de zéro et qu'il s'agit de donner.

Soit, comme au n° 3 et au n° 4,

$$2m = \alpha^2 + \beta^2,$$

α et β naturellement entiers impairs, α positif et même > 1, β d'un signe tel, que l'entier

$$\frac{\alpha + \beta}{2}$$

soit impair. Pour chaque groupe

$$\alpha,\ \beta$$

on formera d'abord la somme partielle

$$\sum \mathcal{F}\left(\frac{\alpha - \beta}{2},\ \alpha - 2s - 1,\ \beta + 2s + 1,\ \frac{\alpha + \beta}{2}\right),$$

où le signe

$$\sum$$

porte sur la variable

$$s$$

dont les valeurs successives sont

$$0,\ 1,\ 2, \ldots,\ \frac{\alpha - 3}{2}.$$

Puis on fera le total

$$\sum \left[\sum \mathcal{F}\left(\frac{\alpha - \beta}{2},\ \alpha - 2s - 1,\ \beta + 2s + 1,\ \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right]$$

de ces sommes partielles pour tous les groupes

$$\alpha,\ \beta.$$

Ce total sera précisément la valeur de

$$\mathrm{R}.$$

Ainsi on aura

$$\mathrm{R} = \sum \left[\sum \mathcal{F}\left(\frac{\alpha - \beta}{2},\ \alpha - 2s - 1,\ \beta + 2s + 1,\ \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right],$$

ou bien, explicitement :

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum \mathcal{F}\left(2^{\alpha_3}\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + 2m_2 - m_1,\ d_3 + 2m_2 + m_1,\ 2^{\alpha_3}\delta_3 + m_1\right) \\ &\quad = \sum \left[\sum \mathcal{F}\left(\frac{\alpha - \beta}{2},\ \alpha - 2s - 1,\ \beta + 2s + 1,\ \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

C'est par cette formule très-générale que nous terminerons notre quinzième article. On en déduit les formules (1) et (2) en supposant la fonction $\mathcal{F}$ indépendante de t, ou de z, et impaire par rapport à chacune des trois autres variables.

PASSAGES RELATIFS
A DES SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES
EXTRAITS
DE MANUSCRITS ARABES INÉDITS
ET TRADUITS

PAR M. F. WOEPCKE [*].

S'il est important d'examiner et de décrire le développement de l'ensemble des sciences mathématiques chez une nation déterminée, ou à une époque particulière, une tâche non moins intéressante, ni moins utile pour l'histoire des mathématiques, consiste à suivre à travers les temps et les peuples certains problèmes qui reparaissent, pour ainsi dire, partout où l'esprit humain s'est occupé de mathématiques.

Ces questions et ces théories se reproduisent et se continuent comme un fil non interrompu, fil d'Ariane qui, retrouvé et renoué par des investigations persévérantes, permet de découvrir le chemin que les sciences exactes ont suivi depuis les temps les plus reculés jusqu'à nos jours, et qui révèle la marche de ces communications par lesquelles plusieurs fois la science, menaçant de s'éteindre entre les mains d'une race épuisée, a été transmise à d'autres parties du genre humain destinées à conserver les connaissances acquises et à les augmenter par de nouveaux progrès.

[*] Nous empruntons ce Mémoire aux *Annali di Matematica pura ed applicata* imprimées à Rome. Il sort un peu du cercle de nos publications ordinaires; mais nous profitons de cette occasion pour rendre hommage à la mémoire de notre bien regretté collaborateur, M. Wœpcke, que la mort a cruellement frappé dans sa trente-septième année, au moment où son talent, mûri par de longues et fortes études, semblait lui promettre le plus bel avenir. (J. L.)

L'ingénieuse idée que j'ai tâché de formuler dans les lignes qui précèdent appartient à M. le prince Boncompagni, que ses importants travaux sur l'histoire des mathématiques, et les recherches vraiment immenses servant de base à ces travaux, ont admirablement préparé à choisir avec sûreté les sujets les plus propres de ce nouveau genre d'études historiques.

M. le prince Boncompagni m'a fait l'honneur de me faire part de ces projets et de m'inviter à rechercher, pour quelques-uns des problèmes dont il s'agit, les traces que je pourrais en découvrir dans des manuscrits orientaux inexplorés jusqu'à présent.

Les pages qui suivent présentent les résultats de l'examen auquel j'ai soumis, relativement à un de ces problèmes, une partie des manuscrits orientaux de la Bibliothèque impériale de Paris.

J'ai traduit la première et la dernière page de chacun des traités dans lesquels j'ai remarqué des passages relatifs à ce problème, ainsi que toutes les pages contenant ces passages.

Manuscrit coté $\frac{931}{2}$ *du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.*

Volume in-4 de 132 feuillets en papier dont le premier et les deux derniers sont des feuillets de garde non numérotés, tandis que les 129 autres sont numérotés avec deux numérations consécutives dont la première va de 1 à 71, et la seconde de 1 à 58.

Feuillet 1, v° l. 1 à 69, v° l. 14 de la première numération : Commentaire du *Talkhîs* ou « Exposé des opérations du calcul », Traité d'arithmétique pratique d'Ibn Albannâ, mathématicien et astronome qui florissait au Maroc dans la première moitié du XIIIe siècle, par Alkalaçâdî, mathématicien arabe-espagnol, mort en 1486 de J.-C. La copie est datée du 29 ramadhân 1229 de l'hégire, ou 14 septembre 1814 de J.-C.

Feuillet 69, v° l. 15 à 71, v° l. 7 de la première numération : Morceau relatif à quelques questions chronologiques par Aboû Zaïd Abdalrahmân Ibn Omar Al'okaïlî Alçoûneci.

Feuillet 1, r° l. 1 à 58, v° l. 24 de la seconde numération : Autre commentaire, sans nom d'auteur, du Talkîs d'Ibn Albannâ.

Comparer sur ce Manuscrit le *Journal asiatique*, cahier de février-mars 1862, p. 105, l. 18, à p. 107, ligne dernière.

Les numéros des feuillets marqués en marge des p. 339 à 349 de la traduction ci-après se rapportent à la première des deux numérations du manuscrit.

Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Que la bénédiction et le salut divins soient sur notre Seigneur Mohammed ! F. 1, v°.

Le serviteur du Dieu très-haut, celui qui a besoin de son pardon, Alî Ben Mohammed Ibn Mohammed Ben Alî le Koraïchite Alandalouci Albasthî, connu sous le nom d'Alkalaçâdî, que Dieu très-haut soit miséricordieux envers lui, amen, amen, amen, amen, dit :

Louange à Dieu qui a créé l'homme par sa grâce, et qui l'a fait exister pour ce qui a été résolu et décrété par la volonté de ses jugements et de sa puissance. Que la bénédiction et le salut divins soient sur notre Seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons.

Pour en venir au fait. Le but que se propose (le présent ouvrage) est l'explication de « *L'exposé des opérations du calcul* » du chaïkh, du très-savant imâm, Ahmed, surnommé le fils de l'architecte (Ibn Albannâ), l'habitant de Maroc, puisse-t-il être agréable à Dieu, et puisse Dieu le rendre content. L'intention de (l'auteur) est que cette introduction forme le commencement du travail qu'il se propose d'entreprendre dans cet ouvrage, et qu'il indique dans le contenu de cette

(introduction) ce qu'ont mentionné les anciens relativement à celui qui écrit un ouvrage sur une science, à savoir qu'il faut qu'il y fasse attention aux huit points capitaux suivants : le but, l'utilité, le caractère, la méthode de l'enseignement, l'ordre, le nom de l'auteur, la justesse et la division.

L'auteur, que Dieu soit miséricordieux envers lui, a réuni implicitement ces huit points dans cette introduction, ainsi qu'il l'a exprimé dans certains vers que voici :

Je me suis appliqué à être concis dans mon exposé,
Parce que je connais les différentes parties de la science et parce que je sais abréger.
Je ne crains pas qu'on m'entende mal en prêtant à ce que je dis des sens différents de celui que j'ai voulu exprimer,
Et je ne cherche rien au delà de ce qui est suffisant pour moi.
Cependant je crains le blâme des grands hommes,
Et certainement les savants accomplis sont en droit de suivre une autre voie,
Mais le devoir de la chamelle est d'enseigner les petits [*].

L'auteur dit : *Le but* [**], c'est-à-dire l'objet, *dans cet ouvrage*, c'est-à-dire cet écrit, *est de donner un exposé fait avec choix*, c'est-à-dire un exposé élégant et concis, *des opérations du calcul, de faire comprendre promptement ses règles*, c'est-à-dire de rendre les règles de l'ouvrage facilement accessibles, *ainsi que le sens des théories*, au moyen des problèmes placés chacun dans le chapitre de la règle qui le concerne et qui lui convient, *et de présenter dans un ordre sévère*

---

[*] Le texte de ces vers que présente ici le manuscrit me paraît très-corrompu ; en outre, la première partie du manuscrit (fol. 1 à 71 de la première numération) est d'une fort mauvaise écriture. Les mêmes vers sont reproduits avec certaines variantes, et sous une forme plus correcte, au folio 1 r° de la seconde numération.

[**] Les mots imprimés en italique forment la traduction des parties du texte de l'ouvrage commenté, intercalées au milieu du commentaire et écrites, dans le manuscrit arabe, à l'encre rouge. J'ai aussi mis en italique quelques passages qui ne sont pas écrits à l'encre rouge dans le manuscrit, mais qui font cependant partie du texte commenté, ainsi que je l'ai reconnu par un examen du second commentaire du *Talkhîs*, contenu dans ce manuscrit, et d'un troisième commentaire contenu dans le manuscrit $^{951}_{3}$ du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.

les bases et le système de cet art. Il comprend deux parties, c'est-à-dire cet ouvrage (comprend deux parties), *dont la première traite des opérations du nombre connu,* en fait d'entiers, de fractions et de racines, *tandis que la seconde traite des règles au moyen desquelles il est possible d'arriver à la connaissance de la grandeur de l'inconnue qui est cherchée, en partant des quantités connues et données,* c'est-à-dire au moyen desquelles il est possible de déterminer l'inconnue, ainsi qu'il sera expliqué plus tard, si Dieu le permet, dans la seconde partie de l'ouvrage. (Cette seconde partie traite) de la manière d'opérer avec les proportions et avec les plateaux de balance [*], de l'algèbre, et de ce qui se rattache à cela. Comme si l'on vous dit : on additionne le tiers et le quart d'une quantité, et cela fait tant; on l'on additionne le tiers et le quart et le cinquième d'une quantité, et cela fait tant ; combien est cette quantité? L'auteur dit (que cette détermination de l'inconnue par les connues est possible) *lorsqu'il existe entre l'une et les autres une relation qui détermine cette* (dépendance). Cette relation | est le rapport qui existe entre les nombres, etc. Fin du f. 1, v°

Si l'on vous dit : combien est la somme de huit nombres dont le plus petit est deux, et qui se dépassent mutuellement de quatre? | Alors F. 8, r°. multipliez l'excès par le nombre des nombres (termes) moins un, ce qui donne vingt-huit. Ajoutez-y le deux, ce sera trente, ce qui est le plus grand (des nombres). Ensuite ajoutez au trente le premier nombre, ce qui fait trente-deux. Multipliez cela par quatre, la moitié du nombre des nombres. Vous aurez pour résultat la quantité cherchée, à savoir cent vingt-huit. En voici la figure, et Dieu seul connaît la vérité.

.·. 2 .·. 6 .·. 10 .·. 14 .·. 18 .·. 22 .·. 26 .·. 30 .·.

L'auteur dit : *Quant à la sommation des nombres suivant l'ordre, elle consiste à multiplier la moitié du* (*nombre*) *jusqu'auquel* (*la suite*) *s'étend par le* (*nombre*) *jusqu'auquel* (*la suite*) *s'étend plus l'unité.* Ceci est la troisième espèce de l'addition, et d'après ce que l'auteur dit, l'opération est claire. Par exemple, si l'on vous dit : additionnez

---

[*] Ce nom désigne la règle des deux fausses positions.

depuis un jusqu'à dix suivant l'ordre naturel des nombres, alors ajoutez un au dix, ce sera onze. Multipliez cela par la moitié du dix, vous aurez pour résultat cinquante-cinq, ce qui est la quantité cherchée. Et si l'on vous dit : additionnez depuis un jusqu'à dix-huit, alors ajoutez un au dix-huit, ce sera dix-neuf. Multipliez cela par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, à savoir par neuf. Vous aurez pour résultat cent soixante-onze, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Et l'élévation au carré* (*se fait*) *par la multiplication de deux tiers* (*du nombre*) *jusqu'auquel* (*la suite*) *s'étend plus un tiers d'une unité, par la somme* (*des nombres simples*). Cela veut dire l'élévation au carré de l'addition des nombres suivant l'ordre, ce qui deviendra plus clair par notre exemple. Si l'on vous dit : additionnez à partir du carré de l'unité jusqu'au carré de dix, alors l'opération dans ce (problème) consiste à prendre deux tiers du dix, ce qui fait six et deux tiers, et à ajouter à cela un tiers d'une unité, de sorte que la somme sera sept. Multipliez cela par la somme (des nombres simples), à savoir par cinquante-cinq; vous aurez pour résultat la quantité cherchée, à savoir trois cent quatre-vingt-cinq.

F. 8, r°, lig. 19. L'auteur dit [*] : *Et l'élévation au cube* (*se fait*) *par l'élévation au carré de la somme* [**]. Cette somme veut dire celle qui résulte de l'addition des nombres (simples) suivant l'ordre. Et le cube signifie, d'après ce qui a été expliqué, le produit de la multiplication d'un nombre par lui-même et puis du résultat par sa racine. Par exemple, si l'on vous dit : additionnez à partir du cube de l'unité jusqu'au cube de dix, alors élevez au carré la somme (des nombres simples), à savoir cinquante-cinq. Vous aurez pour résultat la quantité cherchée, à savoir
F. 8, r°, lig. 24. trois mille vingt-cinq, ainsi : 3025.

L'auteur dit : *Quant à l'addition des nombres impairs suivant l'ordre, elle consiste à élever au carré la moitié du* (*nombre*) *jusqu'au-*

---

[*] Je rappelle que « l'auteur » de l'ouvrage commenté est Ibn Albannâ. La règle pour la sommation des cubes, qui suit ici, appartient donc à Ibn Albannâ, contemporain de Léonard de Pise.

[**] C'est-à-dire

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2.$$

quel (*la suite*) *s'étend joint à l'unité.* Ceci est la quatrième espèce (de l'addition), et c'est la plus facile de ces espèces. La manière de l'effectuer est claire, d'après ce que l'auteur a expliqué. Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf (en prenant) | F. 8, v°
les nombres impairs suivant l'ordre, alors ajoutez l'unité au neuf, ce qui fait dix. Élevez-en la moitié, à savoir cinq, au carré. Il résultera vingt-cinq, ce qui est la quantité cherchée. Et si l'on vous dit : additionnez depuis l'unité jusqu'à vingt-trois, alors additionnez l'unité au vingt-trois, ce qui fait vingt-quatre. Élevez au carré la moitié de cela, à savoir douze. Vous aurez pour résultat cent quarante-quatre, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Et l'élévation au carré* (*se fait*) *par la multiplication d'un sixième du* (*nombre*) *jusqu'auquel* (*la suite*) *s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après.* C'est-à-dire l'élévation au carré de tous les nombres impairs. Et « le rectangle » est le produit d'un nombre par un (autre) nombre. L'auteur dit « par après » par précaution, afin qu'on ne s'imagine pas qu'il s'agit du produit des deux nombres qui précèdent le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend. L'éclaircissement de cela se trouvera dans notre exemple. Si l'on vous dit : additionnez à partir du carré de l'unité jusqu'au carré de neuf, alors prenez un sixième du neuf, ce qui est un et demi. Formez le rectangle des deux nombres qui suivent le neuf, à savoir du dix et du onze. Leur rectangle est cent dix. Multipliez cela par le un et demi. Il résultera cent soixante-cinq, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Et l'élévation au cube* (*se fait*) *par la multiplication de la somme par son double moins un* [*]. Cette élévation au cube (doit s'entendre de) l'addition des nombres impairs. Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube de neuf, alors vous savez déjà que la somme (des impairs simples) est vingt-cinq, et le double de cela moins un est quarante-neuf. Par conséquent, multipliez le vingt-cinq par le quarante-neuf. Vous aurez pour résultat F. 8, v°, lig. 13.

---

[*] C'est-à-dire

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

F. 8, v°, lig. 18. mille deux cent vingt-cinq, ainsi : 1225. | Règle fondamentale. Si l'on vous dit : additionnez depuis le cube de l'unité, suivant l'ordre des nombres impairs, jusqu'à un nombre inconnu, et le résultat sera tant; alors multipliez ce résultat par huit, et additionnez au produit une unité. Prenez la racine de la somme, et ajoutez à la racine de nouveau une unité. Prenez la racine de ce résultat et retranchez-en une unité. Ce qui provient est le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend [*]. Par exemple, si l'on vous dit : on a additionné depuis le cube de l'unité jusqu'au cube d'un certain nombre, suivant l'ordre des nombres impairs, et le résultat a été mille neuf cent quatre-vingt-dix [**]. Alors multipliez cette somme par huit, et ajoutez au produit une unité. Vous aurez en somme cent cinquante-neuf mille deux cent et un. Prenez-en la racine, qui est trois cent quatre-vingt-dix-neuf. Ajoutez à cela une unité, ce sera quatre cents. Prenez-en la racine, qui est vingt, et retran-
F. 9, r°. chez-en l'unité. Vous aurez pour reste | dix-neuf, ce qui est le (nombre) inconnu jusqu'auquel (la suite) s'étend. La manière d'exécuter cette opération se présentera encore, si Dieu le permet, dans le problème
F. 9, r°, lig. 2. du château [***], traitée au moyen de l'algèbre. |

L'auteur dit : *Quant à l'addition des nombres pairs suivant l'ordre, elle consiste à ajouter au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, constamment deux, et à multiplier la moitié de la somme par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend.* Ceci est la cinquième espèce de l'addition. Et l'opération, d'après ce que l'auteur a dit, est

---

[*] C'est-à-dire, si

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + x^3 = k,$$

on aura

$$\sqrt{\sqrt{k.8+1}+1} - 1 = x.$$

[**] C'est ainsi que porte le manuscrit. Mais cette leçon est fausse; il faut lire : dix-neuf mille neuf cents, c'est-à-dire 19900 au lieu de 1990.

[***] Le mot que je traduis ici par « château » signifie aussi « selle. » Or, l'ouvrage d'Ibn Albannâ, commenté ici par Alkalaçadî, était un abrégé d'un ouvrage appelé « La petite selle » (voir *Journal asiatique*, cahier d'octobre-novembre 1854, p. 371, l. 1 à 7). Il est donc possible que Alkalacâdî fasse ici allusion à un problème contenu dans ce dernier ouvrage, de sorte qu'il faudrait traduire : « dans le problème proposé dans » (l'ouvrage intitulé) *La petite selle.* »

claire. Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis deux jusqu'à dix, alors ajoutez au dix deux, ce qui fait douze. La moitié de cela, à savoir six, multipliée par la moitié du dix, donne trente, ce qui est la quantité cherchée. Et si l'on vous dit : additionnez depuis deux jusqu'à vingt-deux, alors ajoutez au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, deux, ce qui fait vingt-quatre. Multipliez cela [*] par la moitié du vingt-deux. Vous aurez pour résultat cent trente-deux, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Et l'élévation au carré (se fait) par la multiplication de deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, plus deux tiers de l'unité, par la somme (des nombres pairs simples).* C'est-à-dire l'élévation au carré des nombres pairs. Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis le carré de deux jusqu'au carré de douze. Alors vous savez, en vertu de ce qui précède, que la somme (des pairs simples) est quarante-deux. Réservez cela. Ensuite prenez deux tiers de douze, ce qui est huit, et ajoutez-y deux tiers, ce qui fait huit et deux tiers. Multipliez cela par le quarante-deux. Vous aurez pour résultat la quantité cherchée, à savoir trois cent soixante-quatre.

L'auteur dit : *Ou multipliez un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après.* Ceci est une seconde manière de l'élévation au carré des nombres pairs. Son éclaircissement, au moyen de notre exemple, consiste en ce que vous multipliez le sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, à savoir de douze, par le rectangle compris sous treize et quatorze, à savoir sous quatre-vingt-deux. Ce (produit) sera la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Et l'élévation au cube (se fait) par la multiplication de la somme (des nombres pairs simples) par son double* [**]. Ceci est l'élévation au cube en additionnant les nombres pairs. La somme est dans notre exemple quarante-deux, et son double est quatre-vingt-quatre. Si l'on en fait le rectangle, le produit est trois mille cinq cent vingt-huit, ce qui est la quantité cherchée. | F. 9, r°, lig. 20. F. 9, r°, lig. 21.

[*] C'est ainsi que porte le manuscrit. Il faut lire : multipliez la moitié de cela.

[**] C'est-à-dire

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3 = 2\,[n(n+1)]^2.$$

Remarque additionnelle, relative au cas où l'on vous dit : additionnez à partir d'un nombre qui n'est pas un, ou qui n'est pas deux, d'une manière semblable à ces additions (qui précèdent). L'opération en ce cas consiste à faire d'abord l'addition à partir de l'unité ou à partir du deux, et à retrancher ensuite de la somme ce qui résulte de (l'addition faite jusqu'au nombre) proposé dans le problème (comme commencement de la suite). L'auteur n'a pas signalé ce (cas) dans le présent ouvrage, mais il l'a signalé dans les discours [*]. Par exemple si
F. 9, v°. | l'on vous dit : additionnez depuis cinq jusqu'à seize suivant l'ordre naturel des nombres, alors additionnez d'abord depuis l'unité jusqu'au seize, d'après ce qui précède. Vous aurez pour résultat trente-six. Réservez cela. Ensuite retranchez du cinq une unité. Il reste quatre. Additionnez depuis un jusqu'à quatre, vous aurez pour somme dix. Retranchez cela du (nombre) réservé, vous aurez pour reste cent vingt-six, et telle est la quantité cherchée. Et si l'on vous dit : additionnez depuis six jusqu'à quatorze en prenant les nombres pairs suivant l'ordre, alors additionnez d'abord deux jusqu'à quatorze. Ce sera cinquante-six. Réservez cela. Ensuite retranchez du six deux, il vous restera quatre. Additionnez depuis deux jusqu'à quatre, ce sera six. Retranchez cela du (nombre) réservé. Vous aurez pour reste cinquante, ce qui est la quantité cherchée. Et si l'on vous dit : additionnez depuis sept jusqu'à onze en prenant les nombres impairs suivant l'ordre, alors additionnez d'abord depuis un jusqu'à onze, ce qui fait trente-six. Ensuite retranchez deux de sept. Il reste cinq. Additionnez depuis un jusqu'à cinq, ce sera neuf. Retranchez cela du (nombre) réservé. Il reste vingt-sept, ce qui est la quantité cherchée. Et vous réglerez d'une manière analogue
F. 9, v°, lig. 14. l'opération pour l'élévation au carré et pour l'élévation au cube [**].

---

[*] Cela peut signifier que l'auteur, Ibn Albannâ, a exposé ces règles verbalement, ou qu'il les a exposées dans un ouvrage intitulé « les Discours, » c'est-à-dire en « livres. »

[**] Ceci comprend la sommation des séries :

$$m^3 + (m+1)^3 + (m+2)^3 + \ldots + (m+n)^3,$$
$$(2m)^3 + (2m+2)^3 + (2m+4)^3 + \ldots + (2m+2n)^3,$$
$$(2m+1)^3 + (2m+3)^3 + (2m+5)^3 + \ldots + (2m+2n+1)^3.$$

TROISIÈME CHAPITRE.

DE LA SOUSTRACTION.

L'auteur dit : *La soustraction est la recherche de ce qui reste après qu'on a retranché l'un de deux nombres de l'autre.* Ceci s'applique à l'exécution écrite de la soustraction. Dans certains de ses ouvrages (Ibn Albannâ) a dit que la signification de la soustraction consiste à faire connaître la différence entre deux nombres différents par rapport à la quantité, dont l'un est plus petit et l'autre plus grand. Il n'a pas rencontré la vraie définition de cette (opération) dans le « Soulèvement du rideau » [*]. Le plus convenable est de dire que la soustraction est la recherche de la différence entre deux nombres dont l'un est plus petit et l'autre plus grand. L'auteur dit : *Elle (se fait) de deux manières. L'une consiste à retrancher le plus petit du plus grand une seule fois.* C'est celle par laquelle on commencera dans le présent chapitre; comme si l'on vous dit : retranchez treize de trente-sept [**]. Alors vous direz : le reste est vingt-quatre. L'auteur dit : *L'autre espèce consiste à retrancher le plus petit du plus grand plus d'une seule fois.* Ceci est le chapitre de la preuve [***], ainsi qu'il sera exposé plus tard, si Dieu le permet. Comme si l'on vous dit : retranchez du trente-cinq (constamment) sept [****]. Ou bien, il en restera un excédant, comme (si vous prenez) quarante et un [*****]. L'auteur dit : *Pour la première espèce, il faut placer (le nombre) dont on retranche*

---

[*] Cet ouvrage d'Ibn Albannâ est mentionné dans le passage d'Ibn Khaldoûn dont le texte et la traduction se trouvent dans le cahier d'octobre-novembre 1854 du *Journal asiatique*, p. 370 et suiv.

[**] Le texte du manuscrit porte par erreur *six* au lieu de *sept*.

[***] C'est l'opération décrite dans le 5e chapitre de la première partie de l'*Arithmétique* d'Alkalaçâdî, p. 252 à 255 des *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, anno XII.

[****] Le copiste paraît ici avoir oublié quelques mots exprimant à peu près ceci : « et dans cet exemple il ne vous restera aucun excédant. »

[*****] En effet, si l'on retranche de 41 autant de fois 7 qu'il est possible, il reste l'excédant 6.

dans une ligne, et au-dessous le nombre qu'il s'agit de retrancher, de la même manière comme dans l'addition; puis il faut retrancher chaque
F. 10, r°. *place (c'est-à-dire chaque chiffre) de celui qui lui correspond,* | *s'il y en a un qui lui correspond* [*].

... Vous aurez pour résultat [**] deux cent quatre-vingt-quatre, ce qui est le nombre déficient. Il a comme parties : une moitié, à savoir cent quarante-deux ; un quart, à savoir soixante et onze; un soixante et onzième, à savoir quatre; la moitié de la (fraction précédente), à
F. 69, v°. savoir deux; et la moitié de celle-ci, à savoir | un. La somme de ces parties est deux cent vingt, ce qui est le nombre excédant. Celui-ci a comme parties : une moitié, à savoir cent dix; un quart, à savoir cinquante-cinq; un cinquième, à savoir quarante-quatre; un dixième, à savoir vingt-deux; une moitié de dixième, à savoir onze; puis en fait de fractions non articulées [***] : un onzième, à savoir vingt; et la moitié de cela, à savoir dix; et le quart de cela, à savoir cinq; et le cinquième (du onzième), à savoir quatre; et le dizième (du onzième), à savoir deux; et la moitié du dixième (du onzième), à savoir un. La somme de ces parties est deux cent quatre-vingt-quatre, ce qui est le nombre déficient. Ces deux nombres sont les nombres amiables les plus petits qu'il soit possible de trouver.

Ceci est la fin de ce que je me suis proposé (de dire) sur cette matière.

Louange à Dieu, le Maître de l'Univers. Que sa bénédiction soit sur notre Seigneur Mohammed, le dernier et le plus parfait des prophètes, le prince des apôtres, et sur sa famille et ses compagnons. Que le salut divin soit répandu sur eux avec profusion jusqu'au jour de la résurrection.

---

[*] C'est-à-dire si le chiffre correspondant du nombre dont on retranche n'est pas zéro.

[**] Alkalaçâdî termine son commentaire en montrant la manière de trouver les deux *nombres amiables* 220 et 284 ; ces nombres jouissent de la propriété que la somme des diviseurs du premier est égale au second, et réciproquement.

[***] Ce sont les fractions qui ne peuvent pas s'énoncer au moyen des mots : une moitié, un tiers, un quart, etc., jusqu'à un dixième inclusivement, ni par la combinaison de ces mots.

Louange à Dieu, le Maître de l'Univers, de la part de celui qui a écrit (cette copie), et qui a besoin (de la miséricorde) de son Seigneur qui pardonne à son esclave (à savoir) Al-hâdjdj Imâd Alfihrî, puisse Dieu accorder son pardon à lui, à ses parents, aux docteurs (qui l'ont instruit), et aux docteurs de ses docteurs, jusqu'au jour de la résurrection.

(Terminé) à l'aurore du vingt-neuvième jour du mois sacré du ramadhân de l'année mil deux cent vingt-neuf [*]. Fin. | F. 69, v°, lig. 14.

Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Que la bénédiction et le salut de Dieu soient sur notre Seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons.

Le serviteur qui a la conscience de ne pouvoir satisfaire à la justice de son Seigneur, l'illustre et lettré jurisconsulte Aboû Zaïd Abdalrahmân Ibn Omar Al'okaïlî Alçoûmeci, que Dieu veuille agir avec lui selon sa grâce et sa générosité, dit :

Louange à Dieu pour avoir rendu nombreux ses bienfaits et ses élus. Grâces à Dieu, pour les bienfaits abondants de son indulgence et de ses dons. Que la bénédiction et le salut de Dieu soient sur notre Seigneur Mohammed, qui est la meilleure de ses créatures, et le dernier et le plus parfait de ses prophètes, et sur sa famille et ses compagnons, qui ont eu la bonne fortune d'embrasser sa cause et de la suivre.

Pour en venir au fait. Ceci est (un travail) qui fournit des explications faciles, intercalées entre les paroles du (traité intitulé) Al-yaçârah (« L'aisance. ») Je l'offre comme un commentaire de ses paroles et de ses sens cachés, et comme un éclaircissement de ses fondements et de ses développements. Afin que ce soit un secours pour celui qui désire le comprendre, et un guide pour celui qui cherche à connaître l'explication de sa science. Et quoique ce traité soit extrêmement concis et abrégé, il n'en embrasse pas moins une branche | de la science qui est F. 70, r° d'une grande étendue.

---

[*] Cette date correspond au 14 septembre 1814 de notre ère. Le manuscrit est donc très-moderne.

Manuscrit coté $\frac{951}{3}$ *du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.*

Volume in-4 de 174 feuillets en papier dont le premier et le dernier sont des feuillets de garde non numérotés, tandis que les autres feuillets sont numérotés au crayon avec les nombres 1 à 172.

Feuillet 1, v° l. 1 à 74, r° l. 20 de la numération écrite au crayon : Commentaire du *Talkîs* ou « Exposé des opérations du calcul » d'Ibn Albannâ, sans nom d'auteur.

Feuillet 77, v° l. 1 à 122, r° l. 26 de la numération écrite au crayon : Commentaire sur « l'Abrégé de la science du calcul » d'Abdoulkâdir Alçakhâwî le châféïte, par Iloçaïn Ben Mohammed Almahallî le châféïte.

Feuillet 123, v° l. 1 à 172, r° l. 15 de la numération écrite au crayon : Traité d'arithmétique pratique intitulé : « Soulèvement du vêtement de la science du calcul » par Alkalaçâdî. La copie de ce traité paraît avoir été achevée le 24 chawwâl 1143 de l'hégire, ou 2 mai 1731 de J.-C.

Comparer sur ce manuscrit le *Journal asiatique*, cahier de février-mars 1862, p. 108, l. 1, à p. 112, l. 7.

Les numéros des feuillets marqués en marge des pages 350 à 362 de la traduction ci-après se rapportent à la numération écrite au crayon.

F. 1, v°. Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Que la bénédiction divine soit sur notre Seigneur et maître Mohammed et sur toute sa famille!

Louange à Dieu, Maître de l'Univers, que sa bénédiction et son salut soient sur notre Seigneur Mohammed, sa famille et tous ses compagnons.

Pour en venir au fait. L'objet de cet ouvrage est de donner un exposé fait avec choix des opérations du calcul, un aperçu succinct de ses règles, et un arrangement, d'après un ordre sévère, de ses fondements. Il comprend deux parties. La première partie traite des opérations du nombre connu. La seconde partie traite des règles au moyen desquelles il est possible d'arriver à ce qui est inconnu et cherché en partant de ce qui est connu et donné, s'il existe entre les deux choses une relation qui rend cela nécessaire.

PREMIÈRE PARTIE.

DES OPÉRATIONS DU NOMBRE CONNU.

Cette partie est divisée en trois divisions. La première division traite

des opérations du nombre entier. La seconde division traite des opérations des fractions. La troisième division traite des opérations des racines.

PREMIÈRE DIVISION.

DES OPÉRATIONS DU NOMBRE ENTIER.

Cette division se partage, convenablement à son but, en six chapitres, dont le premier traite des divisions du nombre et de ses ordres.

PREMIER CHAPITRE.

Le nombre est ce qui est composé d'unités. Par conséquent l'un n'est pas appelé nombre, parce qu'il n'est pas composé d'unités. On dit aussi : le nombre est une réunion de monades [*].

Tel est tout nombre, comme le cinq, le dix, le cent, le mille.

Le nombre est divisé en pair et impair.

Le pair est celui qui se laisse diviser en deux parties égales. Tels sont tous les nombres dans la première place desquels il se trouve un nombre pair, comme deux, quatre, six, huit, ou dans la première place desquels il n'y a point d'unités. Le nombre impair ne jouit point de ces propriétés.

On dit aussi : le nombre pair est celui qui se laisse diviser en deux parties égales, ou en deux parties inégales, l'une étant plus grande et l'autre plus petite, pourvu qu'il soit plus grand que deux [**].

Si le nombre pair est divisé en deux parties égales, et que l'une d'elles est paire, l'autre partie est (pareillement) paire ; et si (l'une des parties) est impaire, l'autre partie est (aussi) impaire. Et s'il est divisé en deux parties inégales, chacune de ces deux parties est (ou bien) impaire (ou paire). Par exemple, le huit se divise en deux nombres pairs, quatre et quatre, qui sont égaux ; et se divise (aussi) en cinq et trois qui sont inégaux, et chacune de ces deux (dernières parties) est impaire.

---

[*] Le mot employé ici est différent du terme ordinaire pour « unité, » employé par exemple l. 2, 3 et 9 de la présente page. Le dictionnaire le traduit par « unitas, singularitas. »

[**] Le deux se divise seulement en deux parties égales, 1 et 1.

Si le nombre pair est divisé en deux parties inégales, chacune de ces deux parties se laisse diviser [*] en deux parties inégales. Ainsi le cinq et le trois sont inégaux, et pareillement les parties de ces deux nombres sont inégales.

F. 7, 1°. Quant au (nombre) impair, | c'est celui dont les parties, etc.

F. 7, v°. . . . vous ajoutez | constamment un demi, et vous multipliez la somme par la quantité réservée. Alors ce qui résulte est la réponse. Par exemple, si l'on dit : additionnez depuis cinq jusqu'à dix-neuf suivant l'ordre des nombres (naturels), alors vous joignez le cinq au dix-neuf, ce qui fait vingt-quatre, et vous réservez cela. Ensuite retranchez le premier des nombres, à savoir cinq, du plus grand des nombres, à savoir dix-neuf. Il reste quatorze. Prenez-en la moitié, qui est sept. Ajoutez-y la moitié d'une unité; ce sera sept et demi. Multipliez cela par le nombre réservé, à savoir par vingt-quatre. Le résultat sera cent quatre-vingts, ce qui est la réponse.

Et si l'on dit [**]; additionnez depuis l'unité jusqu'à dix suivant l'ordre des nombres élevés au carré, ce qui signifie que vous multipliez chacun des dix nombres par lui-même, et que vous additionnez les résultats; alors la méthode pour cela consiste à additionner les nombres suivant leur ordre, d'après la méthode précédente, et à réserver la (somme). Ensuite vous prenez deux tiers du dernier nombre, ce qui est six et deux tiers, et vous y ajoutez un tiers de l'unité. Il résulte sept, ce que vous multipliez par le (nombre) réservé,
F. 7, v°, lig. 11. à savoir cinquante-cinq. Le résultat sera 385, et telle est la réponse.

Et si l'on dit : additionnez depuis l'unité jusqu'à dix suivant l'ordre

---

[*] Le texte ajoute « seulement, » ce qui est faux. Car, par exemple, $12 = 8 + 4$, et 8 est divisible en 4 et 4 qui sont égaux.

[**] On trouve ici sur la marge du manuscrit une glose dont voici la traduction :

Quant à l'addition suivant l'ordre des nombres élevés au carré, l'opération consiste à additionner les nombres suivant leur ordre d'après ce qui précède, et à multiplier le résultat par deux tiers du dernier (nombre), augmentés constamment d'un tiers. Le résultat sera la réponse. Comme (si vous avez) quatre nombres carrés à partir de l'unité, alors multipliez 10 par 3, ce qui est deux tiers du quatre augmentés de $\frac{1}{3}$. Et (pour) les cubes (l'opération consiste) à additionner les (nombres simples) suivant l'ordre de la même manière, et à élever le résultat au carré. Ce sera la réponse.

des cubes, ce qui signifie que vous multipliez chacun des dix nombres par lui-même, que vous multipliez le résultat par son côté, et que vous additionnez les résultats ; alors la méthode pour cela consiste à additionner depuis un jusqu'à dix suivant l'ordre des nombres, d'après la méthode qui précède. La somme sera cinquante-cinq. Ensuite vous élevez au carré ces cinquante-cinq en les multipliant par eux-mêmes. Le résultat sera 3025, ce qui est la réponse. F. 7, v°. lig. 16.

La quatrième espèce (de l'addition) [*] est l'addition suivant l'ordre des nombres impairs ; cela signifie que vous additionnez les impairs tels qu'ils se suivent dans l'ordre naturel. La méthode pour cela consiste à ajouter au dernier nombre, qui est le plus grand des (nombres), constamment une unité, à prendre la moitié de la somme, et à l'élever au carré en la multipliant par elle-même. Alors ce qui résulte est la réponse.

Par exemple, si l'on dit : additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf, suivant l'ordre des impairs, c'est-à-dire l'unité, le trois, le cinq, le sept, et le neuf; alors la méthode pour cela consiste à ajouter au dernier nombre une unité, à prendre un quart de la somme, et à le multiplier par la somme ; ou à prendre le nombre des ordres des impairs

---

[*] On trouve ici sur la marge du manuscrit une glose dont voici la traduction :

Quant à l'addition suivant l'ordre des impairs, l'opération consiste à ajouter au dernier (nombre) constamment un, et à élever au carré la moitié du résultat. Ce sera la réponse. Comme (si vous avez) quatre nombres à partir de l'unité, le résultat sera 16. Et (pour trouver la somme des impairs) suivant leur ordre en les élevant au carré, (l'opération consiste) à multiplier les deux nombres qui viennent après le dernier (nombre) dans l'ordre naturel, et à multiplier le résultat par un sixième du dernier (nombre). Comme (si l'on additionne) depuis 1 jusqu'à 7 en élevant au carré, le résultat est 84. Et (pour additionner les impairs) en les élevant au cube (la méthode consiste) à additionner suivant l'ordre des impairs, à doubler le résultat, à retrancher du double un, et à multiplier le résultat par le (nombre qu'on avait) doublé*. Et si l'on dit : additionnez quatre cases à partir de 1, suivant l'ordre des impairs, alors élevez au carré le nombre des cases, ce sera la réponse. Vous apprenez par là que la racine (carrée) du résultat est le nombre des cases.

* C'est-à-dire

$$1^3+3^3+5^3+7^3+\ldots+(2n-1)^3$$
$$=\left\{2[1+3+5+7+\ldots+(2n-1)]-1\right\}.[1+3+5+7+\ldots+(2n-1)].$$

que vous avez, et à multiplier ce nombre par lui-même. Donc, si vous voulez, ajoutez au neuf une unité; ce sera dix. Prenez-en la moitié, qui est cinq, et multipliez cela par lui-même. Ce sera vingt-cinq, et telle est la réponse.

F. 8, r°. Et si l'on dit : additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf, suivant l'ordre des impairs, en les élevant au carré, ce qui signifie que | chacun de ces impairs doit être multiplié par lui-même; alors la méthode pour cela consiste à former le rectangle des deux nombres qui avoisinent le plus grand des impairs par après, donc à en multiplier l'un par l'autre. Ensuite multipliez ce qui résulte, par un sixième du plus grand impair. Le résultat sera la réponse.

Par exemple, si l'on dit : additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf suivant l'ordre des impairs, en les élevant au carré ; alors multipliez les deux nombres qui avoisinent le neuf par après, à savoir le dix et le onze, l'un par l'autre; ce sera cent dix. Ensuite multipliez ce cent dix par un sixième du neuf, à savoir par un et demi. Il résultera cent soixante-cinq, ce qui est la réponse.

F. 8, r°, fig. 7. Et si l'on dit : additionnez depuis un jusqu'à neuf suivant l'ordre des impairs, en les élevant au cube, alors faites la somme suivant l'ordre des impairs, sans les élever au cube, ainsi qu'il précède. Ce sera vingt-cinq. Réservez cela. Ensuite doublez-le, ce sera cinquante. Retranchez une unité du cinquante; il reste quarante-neuf. Multipliez cela par le (nombre) réservé, qui est vingt-cinq. Il résulte 1225, ce qui est la réponse.

F. 8, r°, fig. 11. Et si l'on dit : additionnez jusqu'à la dixième case suivant l'ordre des impairs, en sous-entendant que dans la première case soit l'unité, dans la seconde trois, et ainsi de suite suivant l'ordre des nombres impairs jusqu'à la dixième case; alors la méthode pour cela consiste à multiplier le nombre des cases par lui-même. Ce qui en résulte sera la réponse. Dans le cas actuel cela est cent.

Vous apprenez par là que, si vous avez un nombre, et que vous désirez savoir combien il contient d'impairs séparément, vous devez en prendre la racine. Ce qui résulte est le nombre des impairs contenus dans le (nombre proposé), si le commencement des (nombres impairs) est un.

Section. Si l'on vous dit : (étant proposé) le nombre cent, (com-

bien) y est-il contenu de nombres impairs se succédant suivant l'ordre en commençant par l'unité? alors la méthode pour cela consiste à prendre la racine du nombre, à savoir de cent, qui est dix; et ce nombre (indique) combien il y a dans cent de nombres impairs suivant l'ordre en commençant par l'unité. Ce sont

$$1.3.5.7.9.11.13.15.17.19,$$

et ce sont dix impairs, (dix) étant le nombre de la racine du cent qui est leur somme.

La cinquième espèce (de l'addition) [*] est l'addition suivant l'ordre des (nombres) pairs, ce qui signifie que vous additionnez les pairs tels qu'ils se suivent dans l'ordre naturel, à savoir deux, quatre, six, huit, dix, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. La méthode pour cela consiste à ajouter au (nombre) pair jusqu'auquel (la suite) s'étend [deux], et à multiplier un quart du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend augmenté de deux. Ce qui résulte est la réponse.

---

[*] On trouve ici sur la marge du manuscrit une glose dont voici la traduction :

Et (pour additionner les nombres) pairs suivant l'ordre naturel, (la méthode consiste) à ajouter au dernier (nombre) 2, et à multiplier la moitié du résultat par la moitié du même dernier (nombre). Comme (si l'on veut additionner) depuis 2 jusqu'à 8, ce dont le résultat est 20. Et (pour additionner les nombres) pairs, en les élevant au carré, (la méthode consiste) à les additionner suivant l'ordre, à ajouter ensuite aux deux tiers du dernier (nombre) constamment deux tiers de l'unité, et à multiplier le résultat par ce qui provenait de l'addition (des nombres pairs simples); ou à former le rectangle des deux nombres qui viennent suivant l'ordre après le dernier (nombre pair) et à multiplier le résultat par un sixième du dernier (nombre). Et si l'on dit : (le nombre) cent dix, combien contient-il de nombres pairs? alors ajoutez-y constamment un quart de l'unité, et retranchez de la racine du résultat constamment la moitié d'une unité; le double* du reste sera la réponse.

* Les mots « double du » sont de trop; il faut dire : le reste sera la réponse. Car, puisque

$$2+4+6+\ldots+2n=n(n+1),$$

si l'on pose

$$n(n+1)=a,$$

on aura

$$\sqrt{a+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}=\sqrt{n^2+n+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}=\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}=\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=n.$$

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis deux jusqu'à dix suivant l'ordre des pairs, alors ajoutez deux au (nombre) jusqu'au-
F. 8, v°. quel (la suite) s'étend, à savoir au dix : ce sera douze. | Prenez-en la moitié, à savoir six, et multipliez-la par la moitié du dix, à savoir par cinq. Il résultera trente, ce qui est la réponse.

Et si l'on dit : additionnez depuis deux jusqu'à dix suivant l'ordre des (nombres) pairs, en les élevant au carré, alors la méthode pour cela consiste en deux manières.

La première (manière est) que vous additionnez les (nombres) pairs suivant l'ordre, ainsi qu'il précède. Ce sera trente. Réservez cela. Ensuite prenez deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, ce qui est six et deux tiers. Ajoutez-y constamment deux tiers de l'unité. Ensuite multipliez la somme, à savoir sept et un tiers, par le (nombre) réservé. Le résultat sera deux cent vingt, et telle est la réponse.

Et si l'on vous dit : nous avons le (nombre) cent dix ; combien y est-il contenu de nombres pairs? alors la méthode pour cela consiste à ajouter au nombre donné constamment un quart de l'unité, à prendre la racine de la somme, et à en retrancher constamment la moitié d'une unité ; le double [*] de ce qui reste sera le nombre des (nombres) pairs. Donc ajoutez au cent dix un quart de l'unité, ce sera cent dix et un quart. Prenez-en la racine, à savoir dix et demi. Retranchez-en un demi. Il reste dix. Le double de cela sera vingt, et tel est le nombre des (nombres) pairs contenus dans cent dix [**].

La seconde manière (de sommer les carrés des nombres pairs suivant l'ordre consiste) à former le rectangle des deux nombres qui avoisinent le dix par après, à savoir du onze et du douze. Donc multipliez-en l'un par l'autre, et réservez le résultat. C'est cent trente deux. Ensuite prenez un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite)

---

[*] Les mots « le double de » sont de trop ; il faut dire : ce qui reste sera le nombre des nombres pairs contenus dans le nombre proposé.

[**] On a

$$110 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20,$$

ce qui sont dix et *non vingt* nombres pairs. Je viens déjà d'indiquer la source de cette erreur du texte arabe.

s'étend, à savoir du dix. Vous trouvez que c'est un et deux tiers. Multipliez cela par le (nombre) réservé, à savoir par le cent trente-deux. Le résultat sera deux cent vingt, ce qui est la réponse, comme précédemment.

Et si l'on dit : [*] additionnez depuis deux jusqu'à dix suivant l'ordre des pairs en les élevant au cube, alors la méthode pour cela consiste à additionner les nombres pairs suivant l'ordre, ainsi qu'il précède, et à réserver le résultat, à savoir trente. Ensuite doublez-le. Ce sera soixante. Multipliez cela par le (nombre) réservé, à savoir par trente. Le résultat sera mille huit cent, et telle est la réponse.

Et si l'on dit : additionnez ce qui est contenu dans dix cases suivant l'ordre des nombres pairs, ce qui signifie que dans la première case se trouve deux, dans la seconde quatre, et ainsi de suite, suivant l'ordre des nombres pairs, jusqu'à la dixième case ; alors la méthode pour cela consiste à multiplier le nombre des cases, à savoir dix, par lui-même augmenté d'une unité. Ce sera cent dix ; et telle est la réponse.

Ceci (est l'opération) si le commencement des nombres pairs est le deux. Mais si le commencement est un nombre pair différent du deux, alors faites-en l'addition en supposant (d'abord) que le commence-

---

[*] On trouve ici sur la marge du manuscrit une glose dont voici la traduction :

L'addition suivant l'ordre des (nombres) pairs en les élevant au cube consiste à additionner les (nombres) pairs suivant l'ordre, à doubler le résultat, et à multiplier le résultat par le (nombre qu'on avait) doublé. Et si l'on dit : additionnez ce qui se trouve dans 10 cases suivant l'ordre des (nombres) pairs à partir de 2, alors l'opération consiste à multiplier le nombre des cases par lui-même augmenté de l'unité. Le résultat sera la réponse. Ceci a lieu si (la suite) commence par 2. Sinon, faites la somme (comme d'habitude) en supposant que le commencement soit 2, et réservez le résultat ; retranchez-en la somme de ce qui se trouve entre le deux et le nombre donné comme premier. Le reste sera la réponse. Et si dans ces trois divisions (de l'addition)* le commencement ne se fait pas par l'unité, alors additionnez (d'abord) depuis l'unité jusqu'au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, et ensuite depuis l'unité jusqu'au (nombre) qui précède le (nombre donné comme) commencement (de la suite), et retranchez le plus petit du plus grand. Dans l'addition des (nombres) pairs le deux tient la place que tient l'unité dans l'addition des autres.

* Les trois divisions dont il s'agit sont : la sommation des nombres naturels, des nombres impairs et des nombres pairs.

ment soit deux, et réservez ce qui en résulte. Ensuite additionnez ce qui est compris entre le deux et le nombre donné comme premier. Retranchez cela du nombre réservé. Ce qui reste est la réponse.

Sachez aussi que, si le commencement est fait à partir d'un nombre
F. 9, r°. différent de l'unité dans une autre de ces | trois divisions [*], vous additionnerez (d'abord) depuis l'unité jusqu'au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, vous additionnerez ensuite depuis l'unité jusqu'au nombre qui précède celui qui est le commencement (donné), et vous retrancherez le plus petit du plus grand. Le deux tient, dans l'addition des nombres pairs, la place que l'unité tient dans l'addition des autres (nombres). Comprenez cela.

TROISIÈME CHAPITRE.

DE LA SOUSTRACTION.

La soustraction est l'action de retrancher le plus petit du plus grand de deux nombres, etc.

. . . Et si l'on dit : on ajoute à une quantité son tiers et un dirhem, de la somme on retranche ensuite son tiers, et il reste un dirhem; combien est la quantité [**]? Alors la réponse est que la quantité est trois huitièmes d'un dirhem. La méthode pour cela consiste à prendre un dénominateur qui ait un tiers, et dont le tiers ait lui-même un tiers.
F. 74, r°. Tel est neuf. Vous y ajouterez donc | son tiers et un dirhem, ce qui fait trois parties et un dirhem, et ce sera douze parties et un dirhem. De cela vous retrancherez son tiers, ce qui est quatre parties et un tiers d'un dirhem. Il reste huit parties et deux tiers d'un dirhem, et

---

[*] Ces trois divisions sont l'addition des nombres pairs, que l'auteur vient de traiter, et l'addition des nombres naturels et des nombres impairs exposés précédemment.

[**] L'équation proposée est

$$x + \frac{x}{3} + 1 - \frac{x + \frac{x}{3} + 1}{3} = 1.$$

La méthode de l'auteur consiste à poser

$$x = 9y,$$

cela est égal au dirhem restant que nous avions donné. Vous poserez donc les huit parties, c'est-à-dire parties d'un dirhem, et vous les réserverez. Ensuite vous retrancherez les deux tiers d'un dirhem du dirhem. Il reste un tiers d'un dirhem. Vous multiplierez cela par le dénominateur, lequel est neuf. Ce sera trois. Vous diviserez cela par la partie, à savoir par huit. Il résultera trois huitièmes d'un dirhem, ce qui est la quantité (cherchée) [*].

---

ce qui lui donne

$$9y\frac{9y}{3}+1-\frac{9y+\frac{9y}{3}+1}{3}=1,$$

ou

$$9y+3y+1-\frac{9y+3y+1}{3}=1,$$

ou

$$12y+1-\frac{12y+1}{3}=1,$$

ou

$$12y+1-4y-\frac{1}{3}=1,$$

ou

$$8y+\frac{2}{3}=1, \quad \text{ou} \quad 8y=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3};$$

mais

$$y=\frac{1}{9}x,$$

donc

$$\frac{8x}{9}=\frac{1}{3}, \quad \text{ou} \quad 8x=\frac{9}{3}=3;$$

donc

$$x=\frac{3}{8}.$$

[*] On trouve ici sur la marge du manuscrit une glose dont voici la traduction :

Quant aux mots du (texte) : « trois huitièmes d'un dirhem, etc., » la preuve de cela (consiste en ce) que vous ajoutez au trois son tiers, ce qui fait quatre huitièmes. A ceci vous ajoutez ensuite huit, en remplacement du dirhem : ce sera douze huitièmes. Après cela vous en retranchez son tiers, ce qui est quatre huitièmes. Il reste huit (huitièmes), ce qui est l'équivalent du dirhem, de sorte qu'il n'est rien resté (de trop). Et, si vous

Et si l'on dit : on ajoute à une quantité son cinquième et un dirhem, on retranche ensuite de la somme son tiers et son quart [*], et il reste deux dirhems, combien est la quantité [**]? Alors la réponse est que

---

voulez, posez le dirhem égal à vingt-quatre, en multipliant trois par huit. Trois huitièmes de cela sont neuf. Ajoutez-y son tiers, ce qui est trois. Il résulte douze huitièmes. Ensuite ajoutez à ceci le dirhem, sous la forme de vingt-quatre. La somme sera trente-six. Retranchez-en son tiers, c'est-à-dire douze. Il reste vingt-quatre, ce qui est l'équivalent du dirhem. Et si on retranche cela, il ne reste rien. Fin de l'observation du (savant ci-dessus) mentionné*.

* A la fin d'une des gloses précédentes, se trouve mentionné le nom de Hoçaïn Almahalli ; je crois que ce Hoçaïn Almahalli est identique au Hoçaïn Ben Mohammed Almahalli le châféite, qui est l'auteur du second des trois Traités contenus dans le manuscrit d'où est tiré le morceau ici traduit. (*Voir* ci-dessus p. 350, l. 9 et 10)

[*] Le texte manuscrit ajoute ici encore « et deux dirhems; on retranche ensuite de la somme son tiers et son quart; » mais la suite prouve que c'est une méprise du copiste.

[**] L'équation proposée est

$$x+\frac{x}{5}+1-\frac{x+\frac{x}{5}+1}{3}-\frac{x+\frac{x}{5}+1}{4}=2.$$

La méthode de l'auteur consiste à poser

$$x=60y,$$

ce qui lui donne

$$60y+\frac{60y}{5}+1-\frac{60y+\frac{60y}{5}+1}{3}-\frac{60y+\frac{60y}{5}+1}{4}=2,$$

ou

$$60y+12y+1-\frac{60y+12y+1}{3}-\frac{60y+12y+1}{4}=2,$$

ou

$$72y+1-\left(42y+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=2.$$

ou

$$30y+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=2,$$

ou

$$30y=2-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}:$$

la quantité est trois dirhems et un sixième. La méthode pour cela consiste à prendre un dénominateur qui ait un tiers et un quart et un cinquième. Tel est soixante. Vous y ajouterez son cinquième et un dirhem. Il viendra soixante-douze parties et un dirhem. Vous retrancherez de cela son tiers et son quart, à savoir quarante-deux parties et un tiers et un quart d'un dirhem. Il reste trente parties et un quart et un sixième d'un dirhem. Cela est égal à deux dirhems.

Donc vous poserez les trente parties comme la partie réservée. Ensuite vous retrancherez le quart et le sixième des deux dirhems, parce que cela était ajouté aux parties. Il reste un dirhem et un tiers et un quart. Vous multiplierez cela par le dénominateur qui est soixante. Ce sera quatre-vingt-quinze. Divisez cela par la partie, à savoir par trente. Il résulte trois dirhems et un sixième d'un dirhem [*], ce qui est la quantité (cherchée).

Ici nous nous arrêtons, et ce (qui précède) peut suffire à celui qui

---

mais

$$y = \frac{1}{60} x,$$

donc

$$\frac{30\,x}{60} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4},$$

ou

$$30\,x = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) 60 = 95,$$

ou

$$x = \frac{95}{30} = 3\,\frac{1}{6}.$$

[*] On trouve ici sur la marge du manuscrit une glose dont voici la traduction :

Quant aux mots du (texte) : « trois dirhems et un sixième, etc. » la preuve de cela (consiste en ce) que vous convertissez cela en des sixièmes. Ce seront dix-neuf sixièmes. Ajoutez-y son cinquième, à savoir trois et quatre cinquièmes. Ensuite ajoutez à cela le dirhem, c'est-à-dire six. Il résultera vingt-huit et quatre cinquièmes. Convertissez le tout en des cinquièmes. Il résulte cent quarante-quatre. Retranchez-en le quart, ce qui est trente-six, et le tiers, ce qui est quarante-huit. La somme de cela est quatre-

le médite. Dieu, qu'il soit loué et exalté, connaît mieux la vérité. Lui est le lieu où tout revient et où tout retourne. Louange à Dieu, Maître de l'Univers. Il nous suffit, c'est le meilleur des protecteurs. Fin.

---

vingt quatre. Ajoutez-y deux dirhems, c'est à dire soixante*. Il résulte comme somme cent quarante-quatre. Donc (vous avez à retrancher une quantité) d'(une quantité) égale, (et) il ne reste rien. Fin de l'observation du (savant ci-dessus) mentionné. Puisse Dieu pardonner à nous et à lui. Amen!

* La première conversion donne le dénominateur six, la seconde le dénominateur cinq, donc ensemble le dénominateur trente; par conséquent deux dirhems, c'est-à-dire deux unités, s'ajoutent sous la forme de soixante trentièmes.

Manuscrit coté $\frac{951}{3}$ *du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.*

Voyez la description de ce manuscrit ci-dessus, p. 350, l. 3 à 14. — Les passages traduits ci-après appartiennent au Traité d'arithmétique pratique d'Alkalaçâdî, intitulé : « Le soulèvement du vêtement de la science du calcul. » Voyez ci-dessus, p. 350, l. 11 à 14. — Les numéros des feuillets marqués en marge des pages 363 à 368 de la présente traduction se rapportent à la numération écrite au crayon sur les feuillets du manuscrit.

Au nom de Dieu clément et miséricordieux ! Que la bénédiction et le salut de Dieu soient sur notre Seigneur Mohammed et ses compagnons. f. 103, v°.

Le chaïkh, le philosophe exact, l'excellent, le docte, l'arithméticien, le savant connaisseur des opérations du partage des successions, celui qui réunit les qualités les plus diverses, le pénétrant, le précis, l'éminent, le célèbre Aboû'l-baçan Alî Ben Mohammed Ben Mohammed Ben Alî (appelé) d'après son pays Alkalaçâdi, puisse Dieu lui être favorable et nous faire profiter de ses mérites, amen, dit :

Louange à Dieu qui est rapide dans son calcul, qui dirige les cœurs, qui est la cause des causes, le créateur des hommes, qui les a fait entrer dans le champ de l'existence en conséquence de sa volonté, et qui les a conduits par son prophète sur le chemin le plus parfait, dont la bonté et la générosité entourent tout ce qui existe, dont l'arrêt prédéterminé et la justice s'exercent à l'égard de toutes ses créatures, qu'il a formées dans des états successifs, et soumises à la nécessité de la destruction et de la mort, et du retour pour l'examen des secrets et des circonstances.

Grâces à Dieu pour les bienfaits nombreux dont il nous a gratifiés, et particulièrement pour ce qu'il nous a placés dans la plus noble espèce des hommes, distinguée par l'excellence de la langue et de l'éloquence.

Que la bénédiction et le salut (de Dieu) soient sur le seigneur des deux mondes, l'(apôtre) envoyé aux hommes et aux génies, le possesseur de la bannière et du nectar, celui en qui nous plaçons notre espoir au jour de la résurrection. (Que ce soit une) bénédiction qui se continue éternellement, tant que luira et brillera l'aurore.

Pour en venir au fait. Après que j'eus composé (l'ouvrage intitulé) :

« Le moyen de fortifier la vue dans la science du calcul, » et qu'il ne m'était pas venu à l'esprit, pendant que j'en étais occupé, que rien dans cet ouvrage pût offrir de la difficulté au lecteur, (je m'aperçus) qu'il contenait des règles et des fondements des opérations exigées par l'art de la composition, et auxquels je fus amené par la nécessité de la rédaction, mais qui arrêtèrent, dans l'étude dudit ouvrage, les com-
F. 124, r°. mençants pour lesquels il avait été composé. Cependant je ne pouvais plus changer l'ouvrage, parce qu'il s'était déjà répandu parmi les hommes, etc.

... TROISIÈME SECTION.

DE L'ADDITION SUIVANT LE RAPPORT.

Quant à l'addition suivant le rapport naturel des nombres, l'opération pour cela consiste à ajouter une unité au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, et à multiplier la somme par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend.

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis un jusqu'à dix ;
F. 169, v°. alors ajoutez au dix un, ce sera onze. | Multipliez cela par le cinq qui est la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend. Il résulte cinquante-cinq, ce qui est (le nombre) cherché.

L'élévation au carré de cette espèce (se fait) par la multiplication de deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, plus un tiers de l'unité, par le résultat de l'addition (des nombres simples).

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis le carré de l'unité jusqu'au carré de dix, alors prenez deux tiers du dix plus un tiers de l'unité. Il en résulte comme somme sept. Multipliez cela par le cinquante-cinq. Il résulte trois cent quatre-vingt-cinq, ce qui est le (nombre) cherché.

F. 169, v°, lig. 5. L'élévation au cube de cette espèce (se fait) de nouveau par l'élévation au carré de la somme, c'est-à-dire du cinquante-cinq dans notre exemple. Ce qui résulte (si l'on additionne) depuis le cube de l'unité
F. 169, v°, lig. 7. jusqu'au cube de dix sera donc trois mille vingt-cinq.

Quant à l'addition suivant l'ordre des nombres pairs, l'opération pour cela consiste à ajouter deux au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, et à multiplier la moitié de cela par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend.

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis deux jusqu'à douze suivant l'ordre des nombres pairs, alors ajoutez au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend deux. Ce sera quatorze, ce dont la moitié est sept. Multipliez cela par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend. Vous aurez pour résultat quarante-deux, ce qui est (le nombre) cherché.

L'élévation au carré de cette espèce (se fait) par la multiplication de deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, plus deux tiers de l'unité, par le résultat de l'addition (des nombres pairs simples).

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis le carré de deux jusqu'au carré de douze; alors prenez deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, et deux tiers de l'unité. Ce sera huit et deux tiers. Multipliez cela par la somme, laquelle est quarante-deux. Vous aurez pour résultat le (nombre) cherché, qui est trois-cent soixante-quatre.

L'élévation au cube de cette espèce (se fait) par la multiplication de la somme (des nombres pairs simples) par son double. F. 169, v°, lig. 15.

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis le cube de deux jusqu'au cube de douze, alors multipliez la somme, à savoir quarante-deux, par son double, à savoir par quatre-vingt-quatre. Vous aurez pour résultat trois mille cinq cent vingt-huit. F. 169, v°, lig. 18

Quant à l'addition suivant l'ordre des nombres impairs, l'opération pour cela consiste à ajouter au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend une unité, et à élever au carré la moitié de la somme.

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf, alors ajoutez au neuf une unité, ce sera dix. Élevez au carré la moitié de cela, ce sera vingt-cinq, et tel est le (nombre) cherché.

| L'élévation au carré de cette espèce (se fait) par la multiplication d'un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui le suivent immédiatement. F. 170, r°.

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis le carré de l'unité jusqu'au carré de neuf, alors multipliez un sixième du neuf, ce qui est un et demi, par le résultat de la formation du rectangle compris sous le dix et le onze, ce qui est cent dix. Vous aurez pour résultat cent soixante-cinq, ce qui est le (nombre) cherché.

L'élévation au cube de cette espèce (se fait) par la multiplication de F. 170, r°, lig. 5.

la somme (des nombres impairs simples) par son double moins un.

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube de neuf, alors multipliez la somme, à savoir vingt-cinq, par son double moins un, à savoir quarante-neuf. Vous aurez pour résultat le (nombre) cherché, lequel est mille deux cent vingt-cinq.

F. 170, r°, lig. 9. Avertissement. Si l'on vous dit : additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube d'un nombre [*]; et le résultat étant tant, combien est le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend? Alors l'opération pour cela consiste à multiplier le résultat par le premier des cubes, à savoir huit, à ajouter au produit de la multiplication une unité, à prendre la racine de la somme, à ajouter ensuite à la racine de nouveau une unité, à prendre la racine de la (somme), et à retrancher de ce qui est (la racine) l'unité. Vous aurez pour reste le (nombre) inconnu jusqu'auquel (la suite) s'étend [**].

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube d'un nombre inconnu, et le résultat sera quatre cent quatre-vingt-seize. Alors multipliez ce résultat par huit, et ajoutez au produit une unité. La somme sera trois mille neuf cent soixante-neuf. Prenez-en la racine. Ce sera soixante-trois. Ajoutez-y une unité. Ce sera soixante-quatre. Prenez-en la racine, à savoir huit. De ceci retranchez une unité. Vous aurez pour reste sept, ce qui est le (nombre) inconnu jusqu'auquel (la suite) s'étend.

F. 170, r°, lig. 19. Quant à l'addition à la manière des cases de l'échiquier, il faut nécessairement que deux conditions aient lieu. L'une, c'est que le commencement soit fait par l'unité; et la seconde, que le (rapport) suivant lequel (les nombres) se dépassent mutuellement soit double. Il suit de

---

[*] Il faut remarquer que l'auteur sous-entend ici, mais sans le dire, qu'il ne prend dans cette addition que les cubes des nombres *impairs* suivant l'ordre.

[**] En effet, l'auteur avait trouvé précédemment

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+x^3=\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\left[2\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-1\right],$$

et, si l'on pose le second membre de cette équation égal à k, on obtient

$$x=\sqrt{\sqrt{8k+1}+1}-1.$$

là que les nombres (qui se trouvent dans les cases sont tous) pairement pairs. | L'objet que l'on se propose est (de connaître) la quantité qui F. 170, v° se trouvera dans la soixante-quatrième case.

... Vous aurez pour résultat deux cent quatre-vingt-quatre, ce qui est le plus grand (des deux nombres amiables).

Ce nombre a en fait de parties : une moitié, un quart, un soixante et onzième, la moitié de cela, et la moitié de la moitié de cela; et la somme de ces parties est | deux cent vingt, ce qui est le nombre F. 171, r° excédant.

Celui-ci a en fait de parties : une moitié, un quart, un cinquième, un dixième, et la moitié du dixième; il a en outre, en fait de parties, un onzième, et la moitié et le quart (du onzième), et pareillement le cinquième de la même partie, et la moitié de cela, à savoir le dixième (du onzième), et la moitié du dixième du (onzième). La somme de ces parties est deux cent quatre-vingt-quatre, ce qui est le nombre déficient.

Ceci est la fin de ce que nous nous sommes proposé dans cette composition. Louange à Dieu, Maître de l'Univers. Que la bénédiction de Dieu et la plénitude de son salut soient sur notre Seigneur Mohammed, sur sa famille et ses compagnons.

L'achèvement [*] de la copie de ce livre eut lieu dans la nuit du mercredi, vingt-trois nuits étant passées du mois de (chawwâl) [**], par la main de celui qui l'a écrit, l'esclave qui a besoin de son Maître

---

[*] Tandis que l'écriture de ce qui précède dans le manuscrit est fort régulière et lisible, elle devient ici brusquement très-négligée et difficile à déchiffrer. La traduction des lignes suivantes, qui terminent cette page du manuscrit, est donc en grande partie conjecturale.

[**] Le texte manuscrit a ici seulement un *lâm*, lettre finale du nom du mois de chawwâl. Comme les Arabes remplacent quelquefois un mot par sa lettre finale, par manière d'abréviation, et comme le mois de chawwâl est le seul dont le nom se termine par un *lâm*, je conjecture que c'est ce mois que le copiste a voulu indiquer. Ce qui me semble confirmer cette conjecture, c'est qu'on lit, à l'endroit indiqué dans la dernière note ci-après, la date de l'année 1143 (de l'hégire), et que le 24e jour du mois de chawwâl de l'année 1143 de l'hégire, qui correspond au 2 mai 1731 de l'ère chrétienne, est précisément un mercredi.

le riche, l'esclave de Celui qui soit loué, le khâdjah [*] Chehr, le médecin; puisse Dieu lui pardonner, ainsi qu'à ses père et mère [**].

Louange à Dieu, Maître de l'Univers. Fin.

---

[*] Khâdjah est un titre honorifique donné par les Orientaux aux personnes riches et respectables.

[**] Dans le prolongement de cette ligne, un peu vers la marge du manuscrit, on lit la date « 1143 ».

Manuscrit coté $\frac{951}{2}$ *du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.*

Voyez la description de ce manuscrit ci-dessus, p. 339, l. 13 à 15. — Les passages traduits ci-après appartiennent au second des deux commentaires du *Talkhîs* d'Ibn Albannâ, contenus dans ce manuscrit. Voyez ci-dessus, p. 339, l. 12 et 13. — Les numéros des feuillets marqués en marge des p. 369 à 377 de la présente traduction se rapportent à la seconde des deux numérations du manuscrit.

Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Que la bénédiction de Dieu soit sur notre Seigneur Mohammed! F. 1, r°.

Ceci est (l'ouvrage intitulé) « Le rapprochement de celui qui est éloigné, sur Ibn Albannâ [*] ».

Louons Dieu d'une louange qui puisse être une expression complète et suffisante de la reconnaissance due pour l'abondance de ses bienfaits. Que la bénédiction et le salut de Dieu les plus parfaits soient sur notre Seigneur Mohammed, le dernier et le plus accompli des prophètes et le prince des apôtres.

Pour en venir au fait. Je me suis rendu au désir des grands, des ingénieux, des nobles, des illustres, des perspicaces, des intelligents, relativement à la rédaction d'un abrégé de mon ouvrage qui a pour objet le Talkhîs d'Ibn Albannâ. Et je me suis appliqué à suivre la trace de l'auteur dans cet objet, en tâchant d'atteindre son but, et en réalisant son intention et la signification du jugement qu'il a émis en disant [**] :

Je me suis appliqué à être bref dans mon exposé,

---

[*] Les mots « Ceci est » jusqu'à « Ibn Albannâ » sont d'une écriture différente de celle du reste de la page, et n'ont été ajoutés évidemment que plus tard. Le mot « sur » est probablement mis par erreur, au lieu de « de », ainsi qu'on le voit par le titre tel que le donne l'auteur du commentaire lui-même, ci-après, p. 370, l. 10 et 11.

[**] Je rappelle que ces vers sont à peu près les mêmes que ceux qui se trouvent cités au commencement du commentaire d'Alkalaçâdî, sans cependant être tout à fait identiques à ceux-ci. Voir ci-dessus, p. 340.

Parce que je sais trouver la juste mesure dans la concision.

Je ne crains pas qu'on m'entende mal en prêtant à ce que je dis des sens différents de celui que j'ai voulu exprimer,

Mais je crains le blâme des grands hommes.

Or, la manière d'agir des savants distingués est la mienne,

Et le devoir de la science [*] est d'instruire les petits [**].

Mais quelquefois j'ai laissé échapper le frein à cause de l'avantage d'un développement additionnel, et afin de rendre plus complète l'utilité (de mon ouvrage).

Je l'ai appelé « Le rapprochement de celui qui est éloigné des problèmes d'Ibn Albannâ. »

J'invoque le Seigneur en le priant d'en laisser profiter et moi, et vous, et tous ceux qui s'en occuperont, comme il nous a permis de profiter de (l'ouvrage qui sert de) base (à mon travail). Il est le bienfaiteur, le généreux. Que sa bénédiction et son salut soient sur notre Seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons.

L'auteur dit : *Le but* [***] *de cet ouvrage est de donner un exposé fait avec choix des opérations du calcul, de rendre prompte et facile l'intelligence de ses règles et de ses théories, et de présenter dans un ordre sévère les bases et le système de cet art.*

Commentaire. « Le but » est l'objet qu'on se propose. Le (mot qui signifie) « exposé fait avec choix » est un infinitif dont le sens est : l'action d'extraire la moelle d'une chose. « Les opérations du calcul », ce sont ses diverses applications, telles que l'addition, la multiplication, la division, l'abaissement [****], et les autres. « L'action de présenter dans un ordre sévère les bases », c'est | etc.

Fin du f. 1, r°.

---

[*] Une variante placée sur la marge du manuscrit porte « de la chamelle ».

[**] Ces vers paraissent être reproduits ici d'une manière plus correcte que dans le commentaire d'Alkalaçâdî. Le mètre dans lequel ces vers sont composés s'appelle *Wâfir*.

[***] Les passages imprimés en italique sont la traduction des passages de l'ouvrage commenté.

[****] C'est l'opération décrite dans le septième chapitre de la deuxième partie de l'Arithmétique d'Alkalaçâdî. Voir *Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, anno XII (1859), p. 274.

L'auteur dit : | *Et l'élévation au carré* [*] *(se fait) par la multiplication de deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, augmentés d'un tiers de l'unité, par la somme* [**]. F. 8, r°.

« L'élévation au carré » signifie la multiplication d'un nombre par lui-même. Cependant l'auteur s'est éloigné de cette signification primitive dans la présente règle, soit pour abréger, soit pour plus de facilité à l'égard de celui qui exécute l'opération. En disant « la somme », l'auteur se sert de l'article pour rappeler ce dont il a été fait mention précédemment; comme cela a lieu aussi dans cette parole du Koran : « Et Pharaon n'obéit point à l'envoyé. » Exemple de cette (règle). Si l'on vous dit : additionnez depuis le carré de l'unité jusqu'au carré de dix, alors l'opération dans ce cas consiste à multiplier deux tiers du dix plus un tiers de l'unité, ce qui est sept, par la somme (des nombres) depuis un jusqu'à dix, ce qui est cinquante-cinq. Vous aurez pour résultat trois cent quatre-vingt-cinq, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Et l'élévation au cube (se fait) par l'élévation au carré de la somme.* « L'élévation au cube » signifie la multiplication d'un nombre par lui-même et du produit par sa racine; comme le huit et le vingt-sept relativement au deux et au trois. L'article dans le mot « la somme » est de nouveau employé pour rappeler (ce qui précède). Donc si l'on vous dit : additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube de dix, alors élevez au carré la somme, à savoir cinquante-cinq. Vous aurez pour résultat trois mille vingt-cinq, ce qui est la quantité cherchée. F. 8, r°, lig. 9.

L'auteur dit : *Quant à l'addition des nombres impairs suivant l'ordre, elle consiste à élever au carré la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend joint à l'unité.* Ceci est la quatrième espèce de l'addition, et l'opération est claire d'après ce que l'auteur a dit. Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf, alors ajoutez un au neuf; ce sera dix. Élevez la moitié de cela, à savoir F. 8, r°, lig. 15.

---

[*] C'est-à-dire la sommation des carrés des nombres naturels suivant l'ordre.

[**] C'est-à-dire la somme des nombres naturels simples.

cinq, au carré. Vous aurez pour résultat vingt-cinq, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Et l'élévation au carré (se fait) par la multiplication d'un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après.* La formation du rectangle » signifie la multiplication d'un nombre par un autre. L'auteur a dit « par après » par précaution, pour empêcher qu'on ne s'imagine (que les deux nombres sont ceux) qui précèdent le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend. Exemple de cette (règle).
F. 8, v°. Si l'on vous dit : additionnez les impairs depuis le carré | de l'unité jusqu'au carré de neuf, alors multipliez un sixième du neuf, ce qui est un et demi, par le rectangle compris sous les deux nombres qui suivent le neuf, à savoir par cent dix. Vous aurez pour résultat cent soixante-cinq, ce qui est la quantité cherchée.

F. 8, v°, lig. 3. L'auteur dit : *Et l'élévation au cube (se fait) par la multiplication de la somme par son double moins un.* L'explication de cela (est contenue) dans notre exemple. Si l'on vous dit : additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube de neuf, alors vous savez que la somme (des impairs simples) est vingt-cinq, et son double moins un, quarante-neuf. Multipliez cela par le vingt-cinq, vous aurez pour résultat
F. 8, v°, lig. 8. mille deux cent vingt-cinq, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Quant à l'addition des nombres pairs suivant l'ordre, elle consiste à ajouter au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, constamment deux, et à multiplier la moitié de la somme par la moitié du (nombre) jusqu'auquel la suite s'étend.* Ceci est la cinquième espèce de l'addition, et la manière de faire l'opération est évidente, d'après ce que l'auteur a dit. Exemple de cette (règle). Si l'on vous dit : additionnez depuis deux jusqu'à douze, alors ajoutez au douze deux; ce sera quatorze. Multipliez la moitié de cela par la moitié du douze. Vous aurez pour résultat quarante-deux, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Et l'élévation au carré (se fait) par la multiplication de deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, plus deux tiers de l'unité, par la somme (des nombres pairs simples).* Ceci est une manière d'exécuter l'élévation au carré. Donc, si l'on vous dit : additionnez depuis le carré de deux jusqu'au carré de douze, alors multipliez deux tiers du douze plus deux tiers de l'unité, ce qui est

huit et deux tiers, par la somme, laquelle est quarante-deux. Vous aurez pour résultat trois cent soixante-quatre, ce qui est la quantité cherchée. La manière de faire la seconde multiplication [*] sera donnée, si Dieu le Très-Haut le permet, dans le (chapitre des) fractions. Cependant j'ai pour cela une méthode abrégée qui consiste à multiplier le huit par le quarante-deux. Vous aurez pour résultat trois cent trente-six. Réservez cela. Ensuite multipliez | le deux qui se trouve au-dessus F. 9, r°.
du trois [**] par le quarante-deux. Vous aurez pour résultat quatre-vingt-quatre. Divisez cela par le dénominateur, à savoir par le trois. Vous aurez pour résultat vingt-huit. Ajoutez cela au (nombre) réservé. Vous aurez en somme de tout cela trois cent soixante-quatre, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Ou multipliez un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après*. Ceci est une seconde manière de l'élévation au carré des nombres pairs. Un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est dans notre exemple deux (et doit être) multiplié par cent quatre-vingt-deux, ce qui est le résultat de la multiplication du treize par le quatorze. La quantité cherchée résultera conforme à ce qui précède.

L'auteur dit : *Et l'élévation au cube (se fait) par la multiplication* F. 9, r°, lig. 9.
de la somme par son double. Ceci est plus clair que (la règle) qui précède. Donc, si vous multipliez le quarante-deux par son double, à savoir par quatre-vingt-quatre, vous aurez pour résultat trois mille cinq cent vingt-huit, ce qui est la quantité cherchée. F. 9, r°. lig. 13.

TROISIÈME CHAPITRE.

DE LA SOUSTRACTION.

La soustraction [***] *est la recherche de ce qui reste après qu'on a retranché l'un de deux nombres de l'autre*. Ceci est la soustraction par

---

[*] A savoir la multiplication de la somme (quarante-deux) par les deux tiers.

[**] Dans la fraction « deux tiers. »

[***] On trouve ici sur la marge du manuscrit une glose dont voici la traduction : Glose. Le plus convenable est de dire que la soustraction est l'action de retrancher

écrit. Et la définition plus exacte consiste à dire : la soustraction est la recherche de la différence entre deux nombres dont l'un est plus petit et l'autre plus grand.

L'auteur dit : *Elle (se fait) de deux manières :* Ceci est de nouveau une division et un classement de (ce qui est compris dans) la soustraction.

L'auteur dit : *Dans la première manière il faut poser* (*etc.*) Cette espèce est le genre de soustraction le plus facile; c'est le cas où, dans chaque rang du nombre que l'on retranche, il se trouve un (chiffre) plus petit que le (chiffre correspondant) dans chaque rang du (nombre) dont on retranche; et l'opération est évidente d'après ce que l'auteur a dit. En voici un exemple. Si l'on vous dit : retranchez cinq cent trente-deux de neuf cent soixante-quatorze, alors posez cela sur deux lignes de la même manière comme dans l'addition. C'est-à-dire que les unités du (nombre) retranché soient sous les unités du (nombre) dont on retranche, et pareillement les dizaines, les centaines, et ce | qui vient après celles-ci, etc.

Fin du f. 9, r°.

F. 58, v°. L'opération, d'après | ce que l'auteur a dit, est évidente. Par exemple, si l'on vous dit : divisez vingt-quatre carrés moins huit choses par quatre choses, alors posez cela ainsi [*] :

Q		C
24	moins	8
C		
4		

---

un nombre plus petit d'un nombre plus grand, et son utilité consiste à faire connaître le reste. Alghazzî et d'autres ont soulevé des objections contre l'auteur au sujet de sa définition.

[*] Voir, pour la manière dont la notation de l'auteur arabe est reproduite, la note au bas de la page 420 du tome XII (année 1859) des *Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*. J'ajoute que dans le manuscrit sur lequel a été faite la présente traduction, le signe de la « chose » a été réduit aux trois points de la lettre *chîn*, et que les nombres simples y sont aussi pourvus d'un signe superposé. Ce signe est le *dâl*, lettre initiale du mot *dirhem* dont les mathématiciens arabes se servent souvent dans le sens d'unité. Je rends ici ce *dâl* par un N (initiale du mot nombre).

Ensuite divisez la quantité à laquelle le « moins » s'applique par le diviseur. Il résultera six choses. Réservez cela. Après cela divisez la quantité qui est régie par « le moins ». Il en résultera deux en nombre. Reliez cela par la particule « moins » aux choses. Le résultat de la division sera : six choses moins deux en nombre, ainsi :

C		N
6	moins	2

Et si l'on vous dit : divisez quarante-huit cubes moins dix-huit carrés, par trois choses, alors posez cela ainsi [*] :

K		Q
48	moins	18

Ensuite divisez la quantité à laquelle le « moins » s'applique. Vous aurez pour résultat seize carrés. Réservez cela. Après cela divisez la quantité qui est régie par le « moins ». Il en résultera six choses. Reliez cela par la particule « moins » aux carrés. Le résultat sera seize carrés moins six choses, ainsi :

Q		C
16	moins	6

Conformez-vous (pour d'autres cas semblables) au sens de cette (règle).

L'auteur dit : *Une espèce inférieure ne peut pas se diviser par une espèce supérieure,* c'est-à-dire à cause de l'impossibilité d'assigner (un résultat). Comme, par exemple, si l'on vous dit : quatre en nombre (divisé) par deux choses, ou neuf cubes [**] (divisés) par trois carrés.

L'auteur dit : *Et l'on ne divise pas non plus une expression qui renferme un « moins ».* C'est-à-dire : et pareillement on ne divise pas

---

[*] Je pense que c'est par un oubli du copiste que le manuscrit omet de poser aussi les « trois choses », en notation, au-dessous des « quarante-huit cubes moins dix-huit carrés » figurés en notations.

[**] Le mot « cubes » paraît être une erreur du copiste, au lieu de « choses ».

par une expression qui renferme un « moins » à cause de l'impossibilité qui a lieu en ce (cas).

Ceci est la fin de ce que nous nous sommes proposé dans cet objet. Et nous prions notre Seigneur qu'il rende cela profitable, comme il a rendu profitable (l'ouvrage qui a servi de) base au (présent travail). Il est bienfaisant et généreux. Que la bénédiction de Dieu soit sur notre Seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons; que le salut de Dieu soit répandu sur eux avec profusion. Louange à Dieu, Maître de l'Univers.

Ceci fut écrit par le pauvre qui a besoin de son Seigneur le riche, Abdallah Soûlât Almozâtî, pour son propre usage, et pour l'usage de qui il plaira à Dieu, après lui. Cette copie fut faite sur un exemplaire difficile à lire.

Manuscrit coté 952 *du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.*

Volume in-4 de 115 feuillets en papier dont les quatre premiers et les trois derniers sont des feuillets de garde non numérotés, tandis que les 108 autres feuillets sont numérotés avec les nombres 1 à 108, écrits à l'encre au moyen des chiffres indiens des Arabes orientaux, et, en outre (sauf le premier feuillet), avec les mêmes nombres écrits à l'encre au moyen des chiffres européens modernes.

Je pense que l'on peut attribuer à ces feuillets numérotés, à en juger d'après la teinte du papier et de l'encre, un âge de cinq à six cents ans, en exceptant les feuillets numérotés 9, 88 et 98 à 108, qui ont évidemment été ajoutés plus tard pour remplacer d'anciens feuillets perdus. La copie paraît avoir été faite en Égypte d'où le manuscrit a été apporté en France par M. Delaporte, lors de l'expédition d'Égypte.

Les 108 feuillets numérotés contiennent le texte d'un Traité d'Algèbre, composé par Aboû Beqr Mohammed Ben Alhaçan Alqarkhî, et dédié au vizir Fakhr Almoulq qui mourut le 3 septembre 1016 de notre ère.

Une analyse très-étendue de ce Traité d'algèbre a été donnée dans l'ouvrage intitulé : *Extrait du Fakhrî*, par F. Wœpcke. Paris, 1853.

Les numéros des feuillets marqués en marge des p. 377 et suiv. de la présente traduction se rapportent à la numération écrite à l'encre.

Au nom de Dieu clément et miséricordieux ! F. 1, v°.

Aboû Beqr Mohammed Ben Alhaçan Alqarkhî, le calculateur, que Dieu le Très-Haut soit miséricordieux envers lui, dit :

J'ai trouvé que le calcul a pour objet la détermination des inconnues au moyen des connues dans toutes ses espèces, et j'ai observé que la plus claire des règles et le plus évident des moyens pour cet effet est l'art de l'Algèbre, à cause de sa puissance et de l'universalité avec laquelle il s'étend sur tous les problèmes du calcul, suivant leur diversité.

J'ai vu que les ouvrages composés sur cet art ne contenaient pas (complétement) ce dont on a besoin en fait de la connaissance de ses éléments ; qu'ils étaient insuffisants par rapport aux théories sur lesquelles on s'appuie dans l'étude de ses branches spéciales ; et que leurs auteurs avaient négligé d'expliquer les théorèmes de cet art qui sont le chemin du plus haut degré (de savoir algébrique) et le moyen de parvenir à la perfection.

Ensuite j'ai fait dans cet art de belles découvertes, dont je n'ai vu chez aucun d'eux une mention, et j'ai éclairci des difficultés dont je n'ai trouvé dans leurs ouvrages ni l'exposé, ni l'explication.

Or, après avoir acquis cet avantage et après avoir éprouvé le besoin de suppléer à ce défaut, je ne pus pas m'empêcher de composer un ouvrage contenant et renfermant ces (perfectionnements), et dans lequel je donnasse une explication faite avec choix des éléments de (l'Algèbre), exempté de l'impureté de la redondance et de la souillure de la verbosité.

Mais je fus éloigné de l'exécution de ce (projet) par les obstacles qu'y opposaient la corruption du temps, les calamités de périodes remplies de désastres et l'état général de crainte, de violence et d'oppression où se trouvaient les hommes jusqu'à ce que Dieu, qu'il soit béni et exalté, les secourût par notre maître, le vizir, le seigneur illustre, le parfait dans le gouvernement, le vizir des vizirs, revêtu des deux autorités, Aboû Ghâlib [*], l'affranchi du commandeur des croyants, dont Dieu prolonge l'existence! Dieu rendit les hommes heureux par l'excellence de son administration, et leur accorda, pendant la durée bienheureuse de ses jours, au plus haut degré tout ce qu'ils désiraient en fait de justice, de sécurité, d'abondance et de bien. Il arracha le monde, par son gouvernement, au vice et aux hommes vicieux, et le rendit resplendissant par la sérénité de son regard et par la manière dont il fit revivre les traces effacées de la science. Dieu fit de lui un modele de toutes les vertus, de sorte qu'on est guidé par sa
f. 2, r°. direction et qu'on demande à être éclairé | par sa lumière.

... Nous faisons cela en vertu de ce que j'ai expliqué. Car, si vous multipliez un nombre quelconque par le nombre suivant, et si vous multipliez ensuite l'un de deux autres nombres se trouvant de part et d'autre des deux (premiers) par celui qui lui correspond, le premier

---

[*] On lit dans les *Vies des hommes illustres* d'Jbn Khallican : Aboû Ghâlib Mohammed Ben Khalaf, surnommé Fakhr Almoulq, vizir de Behâ Aldaoulah, fils d'Adhad Aldaoulah Jbn Bouwaïh... C'est pour lui que Aboû Beqr Mohammed Ben Alhaçan, le calculateur, Alqarkhî, composa le livre (intitulé) Alfakhrî sur l'Algèbre, et le livre (intitulé) « Le (traité) suffisant sur le calcul ». (Comparez la traduction anglaise de M. de Slane, t. III, p. 283; et Abulfedæ *Annales muslemici*, ed. Reiske et Adler, t. III, p. 6 et 7.)

résultat dépasse le second de la quantité du produit de la différence entre l'un des deux extrêmes et l'un des deux moyens | par la différence entre le même extrême et l'autre moyen [*]. Comprenez cela. F. 22, v°

Si l'on vous dit : prenez depuis l'unité jusqu'à dix, à la condition de multiplier chaque nombre par le suivant, un par deux, deux par trois, trois par quatre, et ainsi de suite ; alors prenez (la somme des nombres naturels) depuis un jusqu'à dix, ce qui est cinquante-cinq. Prenez deux tiers du dix moins deux tiers d'un dirhem et multipliez cela par cinquante-cinq. Ce sera trois cent trente [**].

Si l'on dit : combien (obtenez-vous en allant) depuis l'unité jusqu'à dix, à la condition d'élever chacun des nombres au cube et d'additionner les résultats; alors prenez (la somme des nombres naturels) depuis un jusqu'à dix, ce qui est cinquante-cinq. Multipliez cela par lui-même. Ce sera trois mille vingt-cinq, et telle est la réponse [***]. F. 23, v°, lig. 5.

Démonstration numérique de ce (*théorème*). Il a été dit déja précédemment que, si vous divisez un nombre quelconque en deux parties, si l'on multiplie (ensuite) chacune des deux parties par elle-même, et si l'on multiplie l'une des deux parties par l'autre (prise) deux fois, cela (fait ensemble) le carré de ce nombre [****].

Donc, si vous divisez cinquante-cinq en deux parties, dix et quarante-cinq, le produit du dix par lui-même, et le produit du dix par le quarante-cinq (pris) deux fois, ce dont la somme est mille, ensemble avec quarante-cinq (multiplié) par lui-même, est égal au produit de cinquante-cinq par cinquante-cinq Si donc nous rejetons le mille, qui est le cube du dix, ce qui provient de la multiplication de dix par dix et de dix par quarante-cinq (pris) deux fois, de trois mille vingt-cinq,

---

[*] C'est-à-dire

$$[(a+1)+n].(a-n) = (a+1)a - n(n+1).$$

[**]
$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + 9.10$$
$$= (1+2+3+\ldots+10)\left(\frac{2}{3}\cdot 10 - \frac{2}{3}\right) = 55\left(\frac{2}{3}\cdot 10 - \frac{2}{3}\right) = 330.$$

[***] $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3 = (1+2+3+\ldots+10)^2 = 55^2 = 3025.$

[****]
$$a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2.$$

il reste quarante-cinq (multiplié) par lui-même égal à deux mille vingt-cinq [*].

Si maintenant vous divisez le (quarante-cinq) en deux parties, neuf et trente-six, alors neuf fois neuf et neuf [**] fois trente-six (pris) deux fois est sept cent vingt-neuf, ce qui est le cube du neuf. Donc, si vous rejetez cela de deux mille vingt-cinq, il reste mille deux cent quatre-
F. 23, r°. vingt-seize, ce qui est égal au produit de trente-six par | trente-six [***].

Si vous divisez ensuite ce (dernier nombre) en deux parties, huit et vingt-huit, le produit du huit par lui-même et par vingt-huit (pris) deux fois est cinq cent douze, ce qui est le cube du huit. Et si vous rejetez cela du mille deux cent quatre-vingt-seize [****], il reste sept cent quatre-vingt-quatre, ce qui est (le résultat) de la multiplication de vingt-huit par lui-même [*****].

(En continuant) d'une manière semblable à ce procédé on retranche du (nombre trois mille vingt-cinq successivement) le cube de chaque nombre jusqu'à l'unité, et là on s'arrête.

Cela montre que, si vous prenez (la somme des nombres naturels) depuis l'unité jusqu'au nombre que vous voudrez, et si vous la multipliez ensuite par elle-même, (le produit) est égal aux cubes des nombres qui sont précisément les nombres additionnés.

Démonstration de ce (théorème) au moyen de la figure. La surface ABCD est (le résultat) de la multiplication de vingt-un par vingt-un, et vingt-un est (le résultat) de (la sommation des nombres naturels depuis) l'unité jusqu'à six. Nous disons donc que toute la surface ABCD est égale à l'ensemble des cubes des nombres dont l'addition produit vingt-un, à savoir (des nombres) depuis un jusqu'à six.

---

[*] $55^2 = (10 + 45)^2 = 10^2 + 2.10.45 + 45^2 = 1000 + 45^2 = 10^3 + 45^2$.

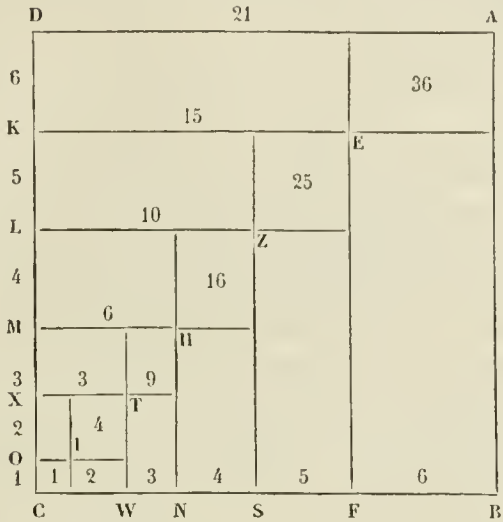
[**] Le texte manuscrit porte « quatre vingt-dix » au lieu de neuf, évidemment par suite d'une erreur de copiste.

[***] $45^2 = (9 + 36)^2 = 9^2 + 2.9.36 + 36^2 = 729 + 36^2 = 9^3 + 36^2$.

[****] Le manuscrit porte « quatre-vingt-six » ce qui est évidemment une faute de copie.

[*****] $36^2 = (8 + 28)^2 = 8^2 + 2.8.28 + 28^2 = 502 + 28^2 = 8^3 + 28^2$.

Démonstration. Nous posons la ligne DK (égale à) [six, et la ligne KL égale à] [*] cinq, LM (égale à) quatre, MX (égale à) trois, XO (égale



à) deux, et OC (égale à) un. De la même manière nous divisons la ligne BC, de sorte que BF égal à DK, FS égal à KL, SN égal à LM; et d'une manière analogue nous déterminons les autres parties.

Cela posé, nous disons que les surfaces DE, EA et EB sont (égales au) cube de six, parce que la surface EA est six fois six, tandis que la ligne KE est quinze, et la ligne EF pareillement, de sorte qu'il résulte des deux surfaces EB et ED cent quatre-vingts. Donc, si vous y ajoutez la surface EA, qui est trente-six, ce sera deux cent seize, ce qui est le cube de six.

Il en est ainsi seulement, parce que, si d'un nombre quelconque vous retranchez l'unité, que vous multipliez le résultat par le carré du | premier nombre, et que vous ajoutez à cela le carré (de ce F. 23, v°.
nombre), il résulte le cube (du même nombre) [**]. Cela est évident.

---

[*] Les mots renfermés entre crochets manquent dans le manuscrit, évidemment par suite d'une omission du copiste.

[**] $$(a - 1)\,a^2 + a^2 = a^3.$$

Et si vous prenez le nombre que vous voudrez (de nombres) à partir de l'unité, suivant l'ordre naturel, et que vous divisez ensuite la somme par le nombre qui suit le (dernier des nombres additionnés), il résulte la moitié du nombre jusqu'auquel vous avez pris (la somme) [*]. Par exemple, vous prenez (la somme) depuis un jusqu'à huit, c'est trente-six; vous divisez cela par neuf; il résulte quatre, ce qui est la moitié du huit.

Donc, si vous prenez (la somme) jusqu'au nombre que vous voudrez, suivant l'ordre naturel, que vous multipliez ce qui en provient par le (nombre) qui suit [**] (pris) deux fois, et que vous joignez à ce qui résulte de cette opération le carré du nombre suivant que je viens de mentionner, alors le résultat est le cube du nombre suivant [***].

Et conformément à cette explication, les surfaces KZ, ZE et ZF sont le cube de la ligne KL; les surfaces LH, HZ et HS le cube de la ligne LM; les surfaces MT, TH et TN égales au cube de MX, et les surfaces XI, IT et IW égales au cube de XO; (enfin) la surface IC est le cube de OC. Il est maintenant évident que la surface CA est égale au cube des
F. 23, v°, lig. 13 nombres depuis un jusqu'à six; et voici la forme de la figure [****].

Si l'on dit : combien (obtenez-vous en allant) depuis un jusqu'à dix, à la condition de multiplier chaque (nombre) impair par l'impair suivant, et chaque (nombre) pair par le pair suivant; alors la règle pour cela (est) que vous prenez (la somme des nombres naturels) depuis un jusqu'à dix, ce qui est cinquante-cinq. Multipliez cela par deux tiers du dix moins un et deux tiers (quantité qui doit être retranchée) es-
F. 24, r°. sentiellement et | invariablement. Ce sera deux cent soixante-quinze. Ajoutez-y constamment une unité, ce qui fait deux cent soixante-seize; et telle est la réponse [*****].

---

[*] $\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+1}=\dfrac{n}{2}$, ou $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n}{2}(n+1)$.

[**] Le texte manuscrit porte « par la moitié de celui qui suit », ce qui est erroné. C'est probablement une faute de copie.

[***] $2.(1+2+3+\ldots+n)(n+1)+(n+1)^2=n(n+1)^2+(n+1)^2=(n+1)^3$.

[****] Dans le manuscrit la figure est placée à la fin de la démonstration.

[*****] $$(1.3+3.5+\ldots+7.9)+(2.4+4.6+\ldots+8.10)$$
$$=(1+2+3+\ldots+10)\left(\frac{2}{3}10-1\frac{2}{3}\right)+1=276.$$

La démonstration de ce (théorème) est évidente, parce que, etc.

... Après cela il faut que vous divisiez le seize par le deux, afin qu'il résulte le cube cherché. Or, vous avez déjà divisé le trente-deux par deux, puis (encore) par deux, afin qu'il résulte le cube; et de cette manière vous l'avez divisé, comme si vous l'aviez divisé par le carré de deux.

Fin de l'ouvrage (intitulé) Le Fakhrî [*], qui comprend les éléments de l'Algèbre et les éléments des problèmes.

Louanges sans bornes et sans fin à Celui qui donne l'intelligence. Que sa bénédiction soit sur notre Seigneur Mohammed, le prophète, et sur sa famille et ses compagnons, les purs, les saints.

Ceci fut écrit et achevé par Sâliq.

[Dans un autre exemplaire (l'auteur) a dit : J'ai exclu de mon f. 108, v°.
présent ouvrage ce qui ne s'y rapporte pas. J'avais désiré y ajouter quelque chose en fait de particularités des figures, du cercle et des testaments. Mais je ne l'ai pas fait pour deux raisons, dont l'une est (mon) aversion pour la prolixité; la seconde (est) que j'ai (déjà) composé sur chacun de ces (objets) un ouvrage étendu, embrassant ses éléments, leurs théories exactes et la solution des problèmes les plus subtils avec leur méthode. Je prie Dieu, le Très-Haut, qu'il m'assiste dans l'accomplissement des devoirs de l'obéissance envers lui, et qu'il facilite à toutes ses créatures ce qui les délivre de l'erreur. Je le supplie de répandre sa bénédiction sur le prophète Mohammed, son élu parmi ses créatures, et sur sa famille, les purs.

Fin de l'ouvrage, à savoir, du (livre) connu sous (le nom) du Fakhrî.

Ceci fut écrit par Sâliq, le pauvre. Fin.

---

[*] Il y a lieu de croire que l'auteur avait donné ce titre à son ouvrage en honneur du vizir Aboû Ghâlib, surnommé *Fakhr* Almonq (« La gloire du gouvernement ») auquel il avait dédié ce Traité.

ÉNONCÉS DE QUELQUES THÉORÈMES

SUR

LA POSSIBILITÉ DE L'ÉQUATION $x^2 - Ny^2 = -1$ EN NOMBRES ENTIERS.

Lettre adressée à M. Liouville par M. Casimir Richaud.

Paris, le 20 novembre 1864.

Monsieur et très-honoré maître,

Je me suis occupé dans ces derniers temps de quelques questions de théorie des nombres relatives à la résolution en nombres entiers de l'équation $x^2 - Ny^2 = P$.

J'ai l'honneur de vous adresser aujourd'hui une partie des résultats auxquels je suis parvenu sur l'équation particulière $x^2 - Ny^2 = -1$. Dans le cas où vous accueilleriez favorablement les théorèmes énoncés ci-après, je suis en mesure de vous transmettre les démonstrations. Les théorèmes **11** et **12** peuvent être étendus à une combinaison quelconque des facteurs premiers ω, A, B,..., a, b,..., et les conditions restrictives des mêmes théorèmes peuvent être modifiées, sans que l'équation correspondante cesse d'être possible en nombres entiers.

Agréez, je vous prie, Monsieur et très-vénéré maître, l'assurance des sentiments respectueux de votre serviteur dévoué,

C. Richaud.

1. Si A, B, C,..., L désignent des nombres premiers de la forme $8n + 5$, les équations

$$x^2 - 2A^\alpha y^2 = -1,$$

$$x^2 - 2A^{2\alpha+1}B^{2\beta+1}y^2 = -1,$$

$$x^2 - 2A^{2\alpha}B^{2\beta}\ldots L^{2\lambda}y^2 = -1$$

sont toujours possibles en nombres entiers.

2. Si A, B, C,..., L désignent des nombres premiers de la forme $8n+5$, et si B, C,..., L ne sont pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - 2Au^2$, les équations

$$x^2 - 2A^\alpha B^\beta y^2 = -1,$$
$$x^2 - 2A^\alpha B^{2\beta+1} C^{2\gamma+1} y^2 = -1,$$
$$x^2 - 2A^{2\alpha+1} B^{2\beta} C^{2\gamma} \ldots L^{2\lambda} y^2 = -1$$

sont toujours possibles en nombres entiers.

3. Si A désigne un nombre premier $8n+5$, et si a, b, c,..., l représentent des facteurs premiers $8n+1$, les équations

$$x^2 - 2A^{2m+1} a^\alpha y^2 = -1,$$
$$x^2 - 2A^{2m+1} a^{2\alpha+1} b^{2\beta+1} y^2 = -1,$$
$$x^2 - 2A^{2m+1} a^{2\alpha} b^{2\beta} \ldots l^{2\lambda} y^2 = -1$$

sont toujours possibles en nombres entiers, pourvu que a, b, c,..., l ne soient pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - 2Au^2$.

4. A et B désignant deux nombres premiers $8n+5$, et a, b, c,..., l des facteurs premiers $8n+1$, les équations

$$x^2 - 2A^{2\alpha+1} B^{2\beta+1} a^m y^2 = -1,$$
$$x^2 - 2A^{2\alpha+1} B^{2\beta+1} a^{2m} b^{2n} \ldots l^{2s} y^2 = -1$$

sont toujours possibles en nombres entiers, pourvu que a, b,..., l ne soient pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - ABu^2$.

5. Si A, B, C,..., L, M désignent des nombres premiers $8n+5$, l'équation

$$x^2 - 2A^{2\alpha+1} B^{2\beta+1} \ldots L^{2\lambda+1} M^{2\mu+1} y^2 = -1$$

est toujours possible en nombres entiers, lorsque l'équation

$$x^2 - 2AB \ldots L y^2 = -1$$

est soluble en nombres de la même nature et lorsqu'en outre M n'est pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - 2AB\ldots Lu^2$, pour le cas de

$$\left(\frac{A}{M}\right) = \left(\frac{B}{M}\right) = \ldots = \left(\frac{L}{M}\right) = 1 \text{ (notation de Legendre).}$$

6. A désignant un nombre premier $8n+5$ et $a, b, \ldots, l, m$ des nombres premiers $8n+1$, l'équation

$$x^2 - 2A^{2p+1} a^{2\alpha+1} b^{2\beta+1} \ldots l^{2\lambda+1} m^{2\mu+1} y^2 = -1$$

est toujours possible en nombres entiers, si l'équation

$$x^2 - 2Aab\ldots l y^2 = -1$$

est soluble en nombres de la même espèce et si de plus m n'est pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - 2Aab\ldots lu^2$, pour le cas de

$$\left(\frac{A}{m}\right) = -1, \quad \left(\frac{a}{m}\right) = \left(\frac{b}{m}\right) = \ldots = \left(\frac{l}{m}\right) = 1 \text{ (notation de Legendre).}$$

Remarque. — Les théorèmes précédents, relatifs au facteur 2, peuvent être étendus à un facteur premier quelconque ω de la forme $4n+1$.

7. ω représentant un facteur premier $4n+1$ et A, B,..., L désignant des nombres premiers de la même forme non compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$, les équations

$$x^2 - \omega^m A^{2\alpha+1} y^2 = -1,$$
$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{\alpha} y^2 = -1,$$
$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2\alpha+1} B^{2\beta+1} y^2 = -1,$$
$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2\alpha} B^{2\beta} \ldots L^{2\lambda} y^2 = -1$$

sont toujours possibles en nombres entiers.

8. ω désignant un nombre premier $4n+1$ et A, B, C,..., L des facteurs premiers de même forme non compris dans les diviseurs li-

néaires de $t^2 - \omega u^2$, les équations

$$x^2 - \omega^{2m+1} A^\alpha B^\beta y^2 = -1,$$
$$x^2 - \omega^{2m+1} A^\alpha B^{2\beta+1} C^{2\gamma+1} y^2 = -1,$$
$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2\alpha+1} B^{2\beta} C^{2\gamma} \ldots L^{2\lambda} y^2 = -1$$

sont possibles en nombres entiers, pourvu que B, C,..., L ne soient pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega A u^2$.

9. ω représentant un nombre premier $4n+1$, A un facteur premier de même forme non compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$ et a, b, c,..., l des facteurs premiers $4n+1$ compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$, les équations

$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2m+1} a^\alpha y^2 = -1,$$
$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2m+1} a^{2\alpha+1} b^{2\beta+1} y^2 = -1,$$
$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2m+1} a^{2\alpha} b^{2\beta} \ldots l^{2\lambda} y^2 = -1$$

sont toujours possibles en nombres entiers, pourvu que a, b,..., l ne soient pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - A u^2$.

10. ω représentant un nombre premier $4n+1$, A et B deux nombres premiers de même forme non compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$ et a, b,..., l des facteurs premiers $4n+1$ compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$, les équations

$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2\alpha+1} B^{2\beta+1} a^\alpha y^2 = -1,$$
$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2\alpha+1} B^{2\beta+1} a^{2\alpha} b^{2\beta} \ldots l^{2\lambda} y^2 = -1$$

sont toujours possibles en nombres entiers, pourvu que les facteurs premiers a, b,..., l ne soient pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - AB u^2$.

11. ω désignant un nombre premier $4n+1$ et A, B, C,..., L, M des nombres premiers de même forme non compris dans les diviseurs

linéaires de $t^2 - \omega u^2$, l'équation

$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2\alpha+1} B^{2\beta+1} \ldots L^{2\lambda+1} M^{2\mu+1} y^2 = -1$$

est toujours possible en nombres entiers, lorsque l'équation

$$x^2 - \omega AB \ldots L y^2 = -1$$

admet des solutions de la même nature et lorsque de plus M n'est pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega AB \ldots L u^2$, pour le cas de

$$\left(\frac{A}{M}\right) = \left(\frac{B}{M}\right) = \ldots = \left(\frac{L}{M}\right) = 1 \text{ (notation de Legendre).}$$

12. ω désignant un nombre premier $4n+1$, A un nombre de même nature non compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$ et $a, b, \ldots, l, m$ des facteurs premiers $4n+1$ compris au contraire dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$, l'équation

$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2p+1} a^{2\alpha+1} b^{2\beta+1} \ldots l^{2\lambda+1} m^{2\mu+1} y^2 = -1$$

est toujours possible en nombres entiers, lorsque l'équation

$$x^2 - \omega A ab \ldots l . y^2 = -1$$

est soluble en entiers, et lorsque de plus m n'est pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega A ab \ldots l u^2$, pour le cas de

$$\left(\frac{A}{m}\right) = -1, \quad \left(\frac{a}{m}\right) = \left(\frac{b}{m}\right) = \ldots = \left(\frac{l}{m}\right) = 1 \text{ (notation de Legendre).}$$

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

SEIZIÈME ARTICLE.

1. Dans ce seizième article, nous considérons un entier donné m, pair ou impair, et nous le décomposons de toutes les manières possibles en une somme de deux carrés plus un reste que nous regardons à son tour comme le produit de deux facteurs dont le second sera essentiellement impair. En d'autres termes, nous écrivons de toutes les manières possibles

$$m = m_1^2 + m_2^2 + d_3 \delta_3,$$

m_1 et m_2 étant des entiers indifféremment pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs, tandis que les entiers d_3, δ_3 sont positifs, d_3 pair ou impair, mais δ_3 toujours impair. Tel est le mode de partition qui servira de base à toutes les formules contenues dans cet article. On trouvera dans ces formules, tantôt une fonction

$$F(x, y, z)$$

impaire par rapport à chacune des trois variables x, y, z dont elle dépend, tantôt une fonction

$$\mathcal{F}(x, y, z, t)$$

de quatre variables, impaire par rapport à x, par rapport à y, et par rapport au groupe des deux dernières variables z, t. Après les longues explications que nous avons données dans notre quinzième article, nos lecteurs savent bien quelle est la nature des fonctions que ces qualifications désignent.

2. Prenant donc pour point de départ l'équation

$$m = m_1^2 + m_2^2 + d_3 \delta_3,$$

telle qu'elle a été définie au n° **1**, je considère l'ensemble des équations particulières qu'elle contient, c'est-à-dire l'ensemble des systèmes

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ \delta_3:$$

puis posant

$$x = \delta_3 - 2m_2,$$
$$y = d_3 + m_2 - m_1,$$
$$z = d_3 + m_2 + m_1,$$

j'introduis une fonction impaire

$$F(x, y, z)$$

de ces dernières variables. A chaque système

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ \delta_3$$

répond une valeur de notre fonction, savoir

$$F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + m_2 - m_1,\ d_3 + m_2 + m_1).$$

Prenons la somme algébrique pour tous les systèmes et désignons-la par L, en sorte que

$$L = \sum F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + m_2 - m_1,\ d_3 + m_2 + m_1).$$

C'est à cette somme

$$L$$

que s'appliquera notre premier théorème. Nous trouvons qu'elle est nulle toutes les fois que m ne peut pas être représenté en nombres entiers par une somme de deux carrés. Dans le cas contraire, elle peut avoir une valeur différente de zéro et dont il s'agit de donner l'expression générale.

Soit

$$m = a^2 + b^2$$

une quelconque des équations qu'on peut écrire en mettant m sous la forme d'une somme de deux carrés, mais sous la condition essentielle que l'entier a soit > 0, tandis que l'entier b peut être indifféremment positif, nul ou négatif. Pour chaque équation de cette espèce, formons la somme

$$\sum F(2a - 2s - 1,\ a - b,\ a + b),$$

où le signe

$$\sum$$

porte sur la variable s dont les valeurs successives sont

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ a - 1;$$

puis, faisant la somme de ces sommes partielles, formons à son tour la somme totale

$$\sum \left[\sum F(2a - 2s - 1,\ a - b,\ a + b) \right],$$

relativement à toutes les équations de la forme

$$m = a^2 + b^2$$

qui peuvent exister sous la condition déjà énoncée de $a > 0$. Cette somme totale sera la valeur de L.

Ainsi on a

$$L = \sum \left[\sum F(2a - 2s - 1,\ a - b,\ a + b) \right],$$

ou bien, explicitement,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + m_2 - m_1,\ d_3 + m_2 + m_1) \\ &\quad = \sum \left[\sum F(2a - 2s - 1,\ a - b,\ a + b) \right]. \end{aligned} \right.$$

Voilà notre première formule.

5. Nous obtiendrons une seconde formule, également relative à l'équation

$$m = m_1^2 + m_2^2 + d_3 \delta_3$$

du n° **1**, si en continuant à considérer une fonction

$$F(x, y, z)$$

de trois variables, impaire par rapport à chacune de ces variables, nous prenons cette fois

$$x = \delta_3 - 2m_2,$$
$$y = d_3 + m_2 - m_1,$$
$$z = \delta_3 + 2m_1.$$

A chaque système

$$m_1,\ m_2,\ d_3,\ \delta_3$$

répondra naturellement une valeur de notre fonction, savoir

$$F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + m_2 - m_1,\ \delta_3 + 2m_1).$$

Prenons la somme algébrique de ces valeurs pour tous les systèmes que l'équation

$$m = m_1^2 + m_2^2 + d_3 \delta_3$$

comporte d'après les explications données au n° **1**, et désignons la somme dont il s'agit par M, en sorte que

$$M = \sum F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + m_2 - m_1,\ \delta_3 + 2m_1).$$

C'est à cette somme

$$M$$

que s'appliquera notre second théorème. Nous trouvons qu'elle est nulle toutes les fois que m ne peut pas être représenté en nombres entiers par une somme de deux carrés. Dans le cas contraire, elle peut avoir une valeur différente de zéro et dont je vais donner l'expression générale.

A cet effet, soit

$$m = a^2 + b^2,$$

l'entier a étant supposé essentiellement > 0, tandis que l'entier b est indifféremment positif, nul ou négatif. Pour chaque équation de cette espèce, formons la somme partielle

$$\sum F(2a - 2s - 1,\ a - b,\ 2b + 2s + 1),$$

où le signe

$$\sum$$

porte sur la variable s dont les valeurs successives sont

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ a - 1;$$

puis de là passons à la somme totale

$$\sum \left[\sum F(2a - 2s - 1,\ a - b,\ 2b + 2s - 1) \right]$$

prise pour toutes les équations de la forme

$$m = a^2 + b^2$$

qui peuvent exister sous la condition énoncée de $a > 0$. Cette somme totale sera la valeur de M.

Ainsi on a

$$M = \sum \left[\sum F(2a - 2s - 1,\ a - b,\ 2b + 2s + 1) \right],$$

ou bien, explicitement,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum F(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + m_2 - m_1,\ \delta_3 + 2m_1) \\ &\quad = \sum \left[\sum F(2a - 2s - 1,\ a - b,\ 2b + 2s + 1) \right]. \end{aligned} \right.$$

Voilà notre seconde formule.

3. Mais la formule vraiment remarquable à laquelle nous voulons arriver, au sujet de l'équation

$$m = m_1^2 + m_2^2 + d_3 \delta_3$$

du n° **1**, contient une fonction

$$\mathcal{F}(x, y, z, t)$$

de quatre variables, impaire par rapport à chacune des deux premières variables x, y, et impaire aussi par rapport au groupe des deux autres variables z, t.

A chaque système

$$m_1, \; m_2, \; d_3, \; \delta_3$$

répond une valeur de notre fonction

$$\mathcal{F}(x, y, z, t),$$

savoir

$$\mathcal{F}(\delta_3 - 2m_2, \; d_3 + m_2 - m_1, \; d_3 + m_2 + m_1, \; \delta_3 + 2m_1).$$

Formons la somme algébrique

$$\sum \mathcal{F}(\delta_3 - 2m_2, \; d_3 + m_2 - m_1, \; d_3 + m_2 + m_1, \; \delta_3 + 2m_1)$$

pour tous les systèmes que l'équation

$$m = m_1^2 + m_2^2 + d_3 \delta_3$$

du n° **1** comporte, et désignons-la par N. Je trouve que l'on a

$$\mathrm{N} = 0$$

toutes les fois que m n'est pas la somme de deux carrés. Mais dans le cas contraire, la valeur de N peut ne pas être nulle, et on l'exprime ainsi qu'il suit.

Posons, en nombres entiers,

$$m = a^2 + b^2,$$

l'entier a étant > 0, tandis que l'entier b peut être indifféremment positif, nul ou négatif, et formons pour chaque équation de cette espèce la somme partielle

$$\sum \mathcal{F}(2a - 2s - 1,\ a - b,\ a + b,\ 2b + 2s + 1),$$

où le signe

$$\sum$$

porte sur la variable s dont les valeurs successives sont

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ a - 1;$$

puis de là passons à la somme totale

$$\sum \left[\sum \mathcal{F}(2a - 2s - 1,\ a - b,\ a + b,\ 2b + 2s + 1) \right]$$

prise pour toutes les équations de la forme

$$m = a^2 + b^2$$

qui peuvent exister sous la condition énoncée de $a > 0$. Cette somme totale sera la valeur de N.

Ainsi on a

$$\mathrm{N} = \sum \left[\sum \mathcal{F}(2a - 2s - 1,\ a - b,\ a + b,\ 2b + 2s + 1) \right],$$

ou bien, explicitement,

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum \mathcal{F}(\delta_3 - 2m_2,\ d_3 + m_2 - m_1,\ d_3 + m_2 + m_1,\ \delta_3 + 2m_1 \\ &\quad = \sum \left[\sum \mathcal{F}(2a - 2s - 1,\ a - b,\ a + b,\ 2b + 2s + 1) \right]. \end{aligned} \right.$$

Voilà notre troisième formule, ou plutôt voilà notre formule fondamentale; car elle renferme implicitement les formules (1) et (2).

Pour déduire la formule (1) de la formule (3), il suffit de supposer

la fonction

$$\mathcal{F}(x, y, z, t)$$

indépendante de t et réduite à une fonction

$$F(x, y, z)$$

impaire par rapport à chacune des variables x, y, z. Les conditions imposées à la fonction

$$\mathcal{F}(x, y, z, t)$$

seront alors remplies, et la formule (3) se changera dans la formule (1). Elle se changera au contraire dans la formule (2) si l'on suppose la fonction

$$\mathcal{F}(x, y, z, t)$$

indépendante de z et réduite à une fonction

$$F(x, y, t)$$

impaire par rapport à chacune des variables x, y, t.

4. Au reste, la formule (3), qui est à quatre variables, contient une infinité de formules à trois variables comme (1) et (2); et celles-ci à leur tour en renferment une infinité d'autres à deux variables ou à une seule variable.

Parmi les formules contenant une fonction à deux variables, je citerai celle-ci :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum (-1)^{\frac{\delta_3-1}{2}+m_2} F(d_3+m_2-m_1,\ d_3+m_2+m_1) \\ &\qquad = \sum F(a-b,\ a+b), \end{aligned}\right.$$

qu'on déduit aisément de la formule (1) et où le signe sommatoire au second membre ne porte plus que sur une portion des couples (a, b) fournis par l'équation

$$m = a^2 + b^2,$$

savoir sur ceux où l'entier a est non-seulement positif, mais encore impair. La fonction F qui figure dans l'équation (4) doit être impaire par rapport à chacune des deux variables dont elle dépend.

Parmi les formules contenant une fonction d'une seule variable, je citerai la suivante :

$$(5)\qquad \sum(-1)^{m_1+m_2}\mathrm{F}(d_3+m_2-m_1)=(-1)^m\sum a\mathrm{F}(b-a),$$

qui se déduit sans peine de la formule (2). La fonction F qui s'y trouve doit être impaire par rapport à la variable dont elle dépend. La sommation au second membre porte cette fois sur tous les couples (a, b) fournis par l'équation

$$m=a^2+b^2,$$

où l'on suppose $a>0$. L'entier a peut d'ailleurs être indifféremment pair ou impair.

5. Il est bon de vérifier notre formule

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum\mathfrak{F}(\delta_3-2m_2,\ d_3+m_2-m_1,\ d_3+m_2+m_1,\ \delta_3+2m_1)\\&\quad=\sum\Big[\sum\mathfrak{F}(2a-2s-1,\ a-b,\ a+b,\ 2b+2s+1)\Big]\end{aligned}\right.$$

au moins dans quelques cas très-simples.

Soit d'abord

$$m=1.$$

L'équation

$$m=m_1^2+m_2^2+d_3\delta_3,$$

du n° 1, ne pourra avoir lieu qu'en prenant

$$m_1=0,\quad m_2=0,\quad d_3=1,\quad \delta_3=1.$$

La valeur du premier membre de l'équation (3) sera donc

$$\mathfrak{F}(1, 1, 1, 1).$$

Pour trouver celle du second membre, on n'aura de même à consi-

dérer qu'une seule équation de la forme

$$m = a^2 + b^2,$$

savoir

$$1 = 1^2 + 0^2.$$

On ne pourra donc prendre que

$$a = 1$$

avec

$$b = 0,$$

et il n'y aura aussi qu'une seule valeur de s, savoir

$$s = 0.$$

Le second membre de l'équation (3) est donc égal à

$$\mathcal{F}(1, 1, 1, 1)$$

comme le premier membre.

Pour

$$m = 2,$$

on a cinq équations de la forme

$$m = m_1^2 + m_2^2 + d_3 \delta_3,$$

où l'on se souvient que δ_3 est essentiellement impair. Les voici :

$$2 = 0^2 + 0^2 + 2.1,$$
$$2 = 1^2 + 0^2 + 1.1,$$
$$2 = (-1)^2 + 0^2 + 1.1,$$
$$2 = 0^2 + 1^2 + 1.1,$$
$$2 = 0^2 + (-1)^2 + 1.1.$$

Il y aura donc cinq termes au premier membre de l'équation (3); mais deux sont nuls d'eux-mêmes et deux autres se détruisent entre

eux, attendu que, par la nature de la fonction $\mathfrak{F}$, on doit avoir

$$\mathfrak{F}(1, 0, 2, 3) = 0, \quad \mathfrak{F}(3, 0, 0, 1) = 0$$

et

$$\mathfrak{F}(-1, 2, 2, 1) = -\mathfrak{F}(1, 2, 2, 1).$$

Le seul qui subsiste est

$$\mathfrak{F}(1, 2, 0, -1).$$

Or, en vertu des deux équations

$$2 = 1^2 + 1^2, \quad 2 = 1^2 + (-1)^2,$$

on retrouve ce même terme au second membre, où il est accompagné d'un autre terme

$$\mathfrak{F}(1, 0, 2, 3)$$

qui est nul de lui-même. La vérification cherchée a donc lieu.

Pour

$$m = 3,$$

le second membre de la formule (3) est égal à zéro, attendu que l'équation

$$3 = a^2 - b^2$$

est impossible. Mais comme on a les dix équations suivantes

$$\begin{array}{ll}
3 = 0^2 + 0^2 + 3.1, & 3 = 0^2 + 1^2 + 2.1, \\
3 = 0^2 + 0^2 + 1.3, & 3 = 1^2 + (-1)^2 + 1.1, \\
3 = 1^2 + 0^2 + 2.1, & 3 = 1^2 + 1^2 + 1.1, \\
3 = (-1)^2 + 0^2 + 2.1, & 3 = (-1)^2 + 1^2 + 1.1, \\
3 = 0^2 + (-1)^2 + 2.1, & 3 = (-1)^2 + (-1)^2 + 1.1,
\end{array}$$

le premier membre de la formule (3) sera composé de dix termes. Aucun de ces termes n'est nul de lui-même; mais les deux termes qui répondent aux équations placées sur une même ligne horizontale sont partout égaux et de signes contraires, attendu que par la nature

de la fonction $\mathcal{F}$ on a

$$\mathcal{F}(-1, 3, 3, 1) = -\mathcal{F}(1, 3, 3, 1),$$
$$\mathcal{F}(3, -1, 1, 3) = -\mathcal{F}(3, 1, 1, 3),$$
$$\mathcal{F}(-1, 1, 3, 3) = -\mathcal{F}(1, 1, 3, 3),$$
$$\mathcal{F}(-1, 3, 1, -1) = -\mathcal{F}(1, 3, 1, -1),$$
$$\mathcal{F}(3, 1, -1, -1) = -\mathcal{F}(3, 1, 1, 1).$$

Le total est donc égal à zéro, conformément à la formule (3).

Je n'entrerai pas dans les détails du calcul pour le cas de

$$m = 4.$$

Je me bornerai à dire que la valeur commune des deux membres de l'équation (3) est alors

$$\mathcal{F}(3, 2, 2, 1) + \mathcal{F}(1, 2, 2, 3).$$

Observons en terminant que quoiqu'il s'agisse dans l'article actuel d'un entier m quelconque, et non plus seulement d'un entier impair comme dans notre quinzième article où d'ailleurs le mode de partition différait beaucoup de celui que marque l'équation

$$m = m_1^2 + m_2^2 + d_3 \delta_3$$

employée ici par nous avec un dernier terme $d_3 \delta_3$ qui n'est plus assujetti à avoir une valeur paire, cependant la formule (3) dont nous venons de nous occuper et la formule affectée du même chiffre dans notre quinzième article dérivent d'une source commune, comme on pourra le voir quand nous entrerons dans le détail des démonstrations.

Lettre de M. de la Gournerie *sur les passages de son* Traité de Géométrie descriptive *qui peuvent le plus intéresser les géomètres, adressée à* M. Liouville.

Monsieur,

Je vous ai remis, il y a peu de jours, la troisième Partie de mon *Traité de Géométrie descriptive* : vous avez maintenant l'ouvrage entier entre les mains. Je l'ai écrit en vue des applications aux arts graphiques; mais, en cherchant à lever les difficultés que les constructions présentent dans diverses circonstances, j'ai été conduit à étudier quelques questions nouvelles de Géométrie générale, et je désire appeler votre attention sur ces recherches. La simple Géométrie m'a suffi le plus souvent, cependant il y a quelques résultats utiles que je n'ai pu établir que par l'Analyse. Je n'ai rien à vous dire sur la première Partie, qui contient les éléments, et pour le Livre V, le premier de la seconde Partie, je me borne à vous indiquer le chapitre II où j'ai développé les principes du *trait* sur les perspectives axonométrique et cavalière

I.

Le Livre VI est consacré aux surfaces développables. Je présente d'abord quelques considérations de Géométrie plane, principalement sur les rebroussements, qu'on divise généralement en deux espèces et qu'il me paraît préférable de classer en ordres, suivant le degré de contact de la courbe avec la tangente commune des deux branches. Ces branches sont d'un même côté de la tangente dans les rebroussements d'ordre pair, et de côtés différents dans les rebroussements d'ordre impair. A un rebroussement du premier ordre, le rayon de courbure est nul; il a une grandeur finie à un rebroussement du se-

cond ordre; enfin il est infini à un rebroussement d'un ordre plus élevé. Le rayon de courbure est ici le rayon d'un cercle ayant avec la courbe quatre points communs, au moins, réunis en un seul : il passe par un point de rebroussement une infinité de cercles ayant avec la courbe trois points communs réunis en un seul. Je reviendrai plus loin sur cette observation.

Les développables se présentent souvent dans les applications comme surfaces d'ombre et comme surfaces d'égale pente. Leurs lignes doubles offrent un grand intérêt, car c'est à une ligne de ce genre que se termine soit l'ombre qui est logée dans la surface, soit l'étendue que l'on peut donner à une excavation dont les talus sont dressés sous une pente uniforme. En général, une ligne double s'arrête à deux points, au delà desquels elle est prolongée par des arcs parasites ou isolés qui appartiennent à la surface. J'appelle les points limites *sommets;* chacun d'eux est un point de rebroussement de l'arête de rebroussement, et la ligne double y touche la génératrice rectiligne qui est la tangente de rebroussement.

Après avoir étudié ces circonstances géométriques avec soin, je présente une étude détaillée de la surface de l'ombre d'une ellipse éclairée par un cercle. A cette occasion, je retrouve pour la développable circonscrite à deux surfaces du second ordre plusieurs théorèmes déjà obtenus par M. Poncelet à l'aide de la théorie des polaires réciproques; je montre notamment qu'on peut inscrire dans cette développable un nombre infini de surfaces du second ordre ayant toutes leurs centres en ligne droite, et que quatre d'entre elles se réduisent à des coniques qui sont des lignes doubles. Je présente aussi quelques théorèmes nouveaux : ainsi j'établis que toute surface du second ordre inscrite coupe la développable circonscrite suivant huit droites (réelles ou imaginaires). Les génératrices forment ainsi huit par huit des groupes qui appartiennent à des hyperboloïdes inscrits. Les génératrices d'un groupe touchent la caractéristique de l'hyperboloïde auquel elles appartiennent, en huit points qui sont sur l'arête de rebroussement de la développable.

Ce théorème permet de discuter la série des surfaces du second ordre inscrites, et de classer les différents genres de la développable;

il conduit aussi à diverses conséquences étrangères à cette surface : on voit, par exemple, que les tangentes de l'intersection de deux surfaces du second ordre appartiennent huit par huit à des hyperboloïdes, car la développable circonscrite à une surface du second ordre suivant une telle ligne est circonscrite à deux surfaces de cet ordre.

M. Chasles a établi une théorie des surfaces du second ordre homofocales, en les considérant comme inscrites dans une même développable ayant pour une de ses lignes doubles un cercle imaginaire à l'infini. Je consacre quelques articles à déduire de mes formules les résultats qu'il a obtenus.

J'étudie plusieurs surfaces d'égale pente; je prends d'abord pour directrice une courbe quelconque, puis je suppose que cette ligne est une conique. Dans ce dernier cas, on trouve une développable circonscrite à deux surfaces concentriques du second ordre : une de ses lignes doubles est à l'infini. Les autres lignes doubles se présentent d'elles-mêmes quand un des axes de la conique directrice est une ligne de plus grande pente de son plan, mais il est assez difficile de les obtenir lorsque la directrice a une position quelconque dans l'espace : il faut chercher quels sont les plans dont l'intersection avec la développable, qui est du huitième ordre, se compose de quatre droites et de deux fois une conique. Pour résoudre ce problème, je prends un système d'axes d'abord arbitraire, et je le détermine de manière que la décomposition nécessaire puisse avoir lieu dans l'équation de la surface, en introduisant d'ailleurs entre les variables une relation du premier degré qui devient l'équation du plan de la ligne double. Je vous indique ce calcul, non pas que la méthode ait rien de bien nouveau, mais à cause des divers artifices que j'ai dû employer pour arriver à la solution, et de la simplicité des résultats. Je trouve que les projections horizontales des deux lignes doubles cherchées et de la directrice sont des coniques homofocales, et que l'intersection des plans de deux d'entre elles est perpendiculaire à la trace horizontale du plan de la troisième. Il y a probablement quelque moyen facile de démontrer ces théorèmes par la Géométrie. Eu égard aux relations que je viens d'indiquer, l'établissement de l'épure de la surface d'é-

gale pente circonscrite à une conique se fait avec une grande facilité relative.

II.

Le Livre VII est consacré aux surfaces gauches.

Il y a déjà plusieurs années que j'ai signalé la propriété des lignes d'ombre de ces surfaces, de passer toutes par certains points singuliers où deux génératrices consécutives se rencontrent : cela résulte de la multiplicité des plans tangents en ces points, et de ce que chaque ligne d'ombre rencontre toutes les génératrices. Les lignes d'ombre sont tangentes à la génératrice sur laquelle se trouve le point singulier. Quand une génératrice est parallèle à celle qui lui est infiniment voisine, les courbes d'ombre la rencontrent à l'infini et ont cette ligne pour asymptote. Dans son Mémoire sur la déformation des surfaces, M. Bour a appelé *sommets* les points où deux génératrices consécutives se coupent, et *arête* toute génératrice parallèle à celle qui lui est infiniment voisine. J'ai adopté ces expressions. Les diverses surfaces gauches que j'ai eu l'occasion d'étudier ont des sommets ou des arêtes, sauf celles qui sont du second ordre et les hélicoïdes.

J'établis avec plus de détails et de rigueur les théorèmes que j'avais déjà fait connaître sur les sommets et les arêtes, et je donne de nouvelles propositions dont je vais vous entretenir.

Toutes les fois que les directrices de la surface n'ont ni inflexion ni rebroussement, un sommet est l'extrémité de l'arc utile d'une ligne double. Ainsi, dans un conoïde droit circonscrit à un cercle, la directrice rectiligne a un segment utile et double qui se termine à deux sommets. Elle est parasite ou isolée au delà de ces points, mais elle appartient à la surface sur toute sa longueur.

Les sections de la surface par les plans qui passent à un sommet et qui ne contiennent pas la génératrice ont un rebroussement. Les tangentes de rebroussement de toutes ces sections sont dans un même plan, ainsi que cela a lieu pour les développables. M. Bour, à qui j'avais communiqué les résultats qui précèdent, a appelé ce plan *plan de rebroussement*.

M. Chasles a démontré que le plan tangent d'une surface gauche en un point d'une génératrice fait avec le plan tangent en un autre point

déterminé de la même droite (*point central*) un angle dont la tangente est proportionnelle à l'abscisse du premier point mesurée à partir du second :

$$\tang \theta = \frac{x}{k}.$$

La longueur constante k ou le paramètre de distribution des plans tangents aux divers points de la génératrice, est la limite du rapport qui existe entre la plus courte distance de cette droite à une autre génératrice, et l'angle que ces lignes comprennent. Il semble, d'après cela, que toute arête étant parallèle à la génératrice qui lui est infiniment voisine, son paramètre est infini; or, quelque paradoxale que cette proposition paraisse au premier abord, il est certain que cela n'a pas toujours lieu, et que les arêtes du cylindroïde, par exemple, ont des paramètres finis.

Considérons un cylindre elliptique horizontal, coupons-le par deux plans verticaux non parallèles; élevons d'une certaine quantité l'une des sections dans son plan, de manière que tous ses points décrivent des droites verticales : si les anciennes génératrices du cylindre passent toujours par les mêmes points des sections, elles forment actuellement une surface gauche du quatrième ordre que Frézier a appelée *cylindroïde*, et qui a quelques emplois en stéréotomie.

Les génératrices du cylindre le long desquelles le plan tangent était vertical deviennent des arêtes du cylindroïde; or, quand on cherche analytiquement le paramètre des génératrices de cette surface, on trouve qu'il ne dépend pas de l'inclinaison des tangentes des directrices sur le plan horizontal, de sorte qu'il a une grandeur finie pour les arêtes comme pour les autres génératrices.

En déterminant le paramètre des arêtes du cylindroïde et des conoïdes, et le point central de ces génératrices comme appartenant à la ligne de striction, on trouve les dispositions suivantes :

1° Cylindroïde : point central à l'infini, — paramètre fini;

2° Conoïde oblique : point central à l'infini, — paramètre infini;

3° Conoïde droit : point central à distance finie, — paramètre infini.

Un examen attentif fait comprendre cette diversité.

Lorsque le point de contact d'un plan qui contient une génératrice

d'une surface gauche parcourt la longueur indéfinie de cette droite, le plan tourne de 180 degrés. Si une génératrice rencontre celle qui lui est infiniment voisine, suivant une remarque de M. Bour, l'évolution entière se fait au point commun, de sorte que si l'on considère une surface développable, on doit regarder que le plan tangent tourne de 180 degrés, au moment où le point de contact passe d'une nappe à l'autre. D'après cela, pour une arête, l'évolution se fait à l'infini.

Dans la formule que j'ai rappelée, la lettre x représente l'abscisse du point considéré mesurée à partir du point central pris pour origine. Quand le point central est à l'infini, tous les points à distance finie ont des abscisses infinies. Alors, si le paramètre est fini, θ atteint 90 degrés, et le plan tangent le long de l'arête est perpendiculaire au plan qui touche la surface au point central (*plan central*). C'est en effet ce qui arrive pour le cylindroïde : le plan tangent le long d'une arête de cette surface est parallèle au plan directeur, et on sait que tous les plans centraux sont perpendiculaires à ce dernier plan.

Dans le conoïde oblique, le point central d'une arête est encore à l'infini, et par suite les abscisses des points à distance finie sont infinies. Mais l'angle du plan tangent le long de l'arête avec le plan central n'est pas de 90 degrés, et alors la formule exige que le paramètre soit infini.

Enfin, pour un conoïde droit, le point central est à distance finie, et les divers points de la génératrice ont des abscisses finies; comme d'ailleurs le paramètre est infini, θ est constamment nul, et le plan central est tangent le long de l'arête. L'angle θ devient indéterminé pour une valeur infinie de l'abscisse, ce qui devait être, puisque l'évolution se fait à une distance infinie du point central.

Les différences que j'ai reconnues pour les arêtes sont donc la conséquence de la loi de variation du plan tangent découverte par M. Chasles.

Non-seulement le paramètre d'une arête peut avoir une grandeur finie, mais il devient quelquefois nul. Cela arrive sur les surfaces développables quand l'arête de rebroussement a une asymptote : cette droite est parallèle à la génératrice qui lui est infiniment voisine, et son paramètre est nul comme celui de toutes les génératrices de la surface.

La formule qui donne la valeur de k n'apprend rien, pour une

arête, quand le point central est à l'infini, parce que l'on ne peut plus dire quel est, à ce point, l'ordre de grandeur de la distance des deux génératrices consécutives par rapport à leur angle.

Si l'on considère une arête sur le cylindroïde et sur le conoïde oblique, en donnant à θ une grandeur finie quelconque, on trouve, par l'équation, que l'abscisse correspondante x a une valeur finie pour la première surface et infinie pour la seconde. Ainsi, bien que l'évolution se fasse à l'infini pour les arêtes des deux surfaces, il y a dans la disposition des plans tangents aux points qui sont voisins de ces droites, une différence que l'on peut rendre manifeste en traçant des courbes par les points des génératrices où l'obliquité du plan tangent sur le plan central a des valeurs déterminées. Ces lignes interceptent sur les génératrices des segments proportionnels; elles sont asymptotes des arêtes, concourent aux sommets, et sont tangentes en ces points à la génératrice. Quand le point central d'une arête est à l'infini et que son paramètre est infini, comme cela a lieu sur le conoïde oblique, les courbes dont nous venons de parler s'écartent de plus en plus lorsque la génératrice approche d'une arête, et cette augmentation des segments interceptés sur la génératrice n'a d'autre limite que l'infini. Sur le cylindroïde, au contraire, les distances des courbes mesurées sur les génératrices conservent des grandeurs finies.

Puisque je vous parle des génératrices singulières des surfaces gauches, je vais passer à un article qui complète leur étude, et que j'ai dû insérer dans le Livre relatif à la courbure des surfaces.

Lorsqu'une surface gauche est éclairée par un point lumineux situé dans le plan tangent le long d'une génératrice singulière, cette droite fait partie de la ligne d'ombre : c'est la branche qui passe au sommet; une autre branche rencontre toutes les génératrices et traverse nécessairement celle suivant laquelle le plan touche la surface. Or on trouve que quelle que soit la position du point lumineux dans le plan tangent, la ligne d'ombre passe par un même point de cette droite. Le plan tangent est osculateur à la surface en ce point, et son intersection avec elle y rencontre la génératrice. Lorsque le point lumineux est sur la génératrice elle-même, cette droite fait deux fois partie de la

ligne d'ombre; son point d'intersection avec la courbe d'ombre proprement dite et le sommet (point central) sont conjugués harmoniques du point lumineux et de celui où le plan est osculateur de la surface.

Ces théorèmes lèvent quelques difficultés assez sérieuses que présentait le tracé des lignes d'ombre sur les surfaces gauches. On obtient le point d'osculation du plan tangent par des constructions qui ne présentent pas de difficultés : quand la surface a un plan directeur, ce point est à l'infini.

La détermination du lieu des centres de courbure des sections principales aux différents points d'une génératrice d'une surface gauche est un problème assez compliqué. Il se simplifie beaucoup pour une génératrice singulière, parce que les centres de courbure de l'une des séries s'éloignent à l'infini, et que ceux des sections par des plans perpendiculaires à la génératrice sont dans un même plan : leur lieu est une hyperbole dont une asymptote est perpendiculaire à la génératrice et rencontre cette droite au point d'osculation du plan tangent. Quand la surface a un plan directeur, le lieu des centres de courbure devient une parabole ; lorsqu'elle est développable, la courbe se réduit à deux droites : on trouve alors une infinité de centres de courbure pour la section qui a un rebroussement, ce qui tient à ce que tout cercle passant par un point de rebroussement et tangent à la tangente de rebroussement doit être considéré comme ayant en commun avec la courbe trois points infiniment rapprochés.

Quand la génératrice singulière est une arête, l'hyperbole devient équilatère; elle a cette arête pour asymptote, et son centre est au point d'osculation du point tangent. Il suit de là que de part et d'autre de ce point, les rayons principaux de courbure ont des grandeurs absolues égales. Dans le cas où l'arête a un paramètre fini, les centres de courbure sont sur une droite parallèle à une génératrice, d'où l'on voit que lorsqu'une surface gauche possède une arête ayant un paramètre fini, elle est osculée par des cylindres le long de cette droite. La réciproque de cette proposition est vraie.

Les arêtes singulières ont diverses autres propriétés : ainsi, quand une surface gauche possède un sommet à distance finie, elle est touchée par sa développable asymptote tout le long de la génératrice qui passe à ce point. Mais c'est assez vous entretenir de ce sujet; je

vais passer à des questions d'une nature différente sur les surfaces gauches.

J'ai étudié d'une manière minutieuse deux surfaces gauches à plan directeur : le cylindroïde elliptique et le conoïde oblique circonscrit à une conique. Ces surfaces sont du quatrième ordre.

Le conoïde a une génératrice isolée : elle est située dans le plan de la conique directrice, passe par le point où la directrice rectiligne rencontre ce plan, et est parallèle au plan directeur. En considérant ses rencontres imaginaires avec la conique, on reconnaît qu'elle satisfait à toutes les conditions imposées aux génératrices. Les plans passant par cette droite coupent la surface suivant des coniques. Le cylindroïde a aussi une génératrice isolée qui est l'intersection des plans des directrices, et, par suite, il admet une génération par des coniques. Ces génératrices deviennent, dans certaines dispositions des données, des intersections de nappes réelles de la surface; elles peuvent aussi former des arêtes de rebroussement.

Le cylindroïde a une ligne double de contact à l'infini, de sorte que son intersection avec un plan parallèle à une génératrice possède deux branches infinies (quatre bras) ayant une même asymptote.

Comme exemple pour les surfaces qui n'ont pas de plan directeur, j'ai choisi, uniquement à cause de ses propriétés intéressantes, la surface d'intrados de la petite voûte connue en stéréotomie sous le nom de *biais passé gauche*. Ses génératrices sont parallèles deux à deux, et comme d'ailleurs elle est du quatrième ordre, on voit que son cône directeur est du second. Elle a deux sommets et, dans une certaine disposition des directrices, deux arêtes. Les sommets limitent un segment utile et double de la directrice rectiligne. Le contour apparent de cette surface, sur le plan horizontal, se compose des génératrices qui passent aux sommets et d'une hyperbole qui a pour asymptotes la projection des arêtes et la projection des génératrices horizontales. Quand les arêtes sont imaginaires, la branche correspondante de l'hyperbole est parasite. La projection de ce même contour apparent sur un plan perpendiculaire à la directrice rectiligne est formée des génératrices dont je viens de vous parler et d'une conique qui n'a jamais

de partie parasite. Les sections de la surface par des plans perpendiculaires à la directrice rectiligne sont les conchoïdes à trois directrices circulaires. Enfin les génératrices appartiennent deux à deux à des plans verticaux; dans chacun de ces plans la section de la surface est complétée par une conique; la surface admet ainsi un système de génération par des coniques.

Je ne vous ai pas parlé des surfaces gauches du second ordre; c'est qu'en réalité mon ouvrage ne contient rien de nouveau sur elles, si ce n'est peut-être dans le tour de quelques démonstrations. Je vous indiquerai cependant une expression très-simple du paramètre de distribution des génératrices de l'hyperboloïde scalène, un dessin de la ligne de striction de cette surface et diverses considérations sur les hyperboloïdes de raccordement.

Je reviendrai plus loin sur les surfaces gauches, en vous parlant des surfaces lieux de normales et des hélicoïdes.

III.

La théorie de la courbure des surfaces avec ses applications aux arts graphiques forme l'objet du Livre VIII. Deux considérations très-simples me permettent d'obtenir facilement les principaux théorèmes : la première consiste en ce que si l'on considère deux plans rectangulaires, parallèles à une droite normale à une surface et infiniment voisins de cette ligne, leurs intersections avec la surface se rencontrent nécessairement; la seconde, c'est que les rayons de courbure des sections faites par des plans parallèles et infiniment voisins ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite. A l'aide de ces deux remarques, j'établis d'abord le théorème de M. Bertrand sur l'égalité des grandeurs absolues des angles formés par deux plans rectangulaires et normaux en un point considéré, avec les normales de la surface en des points situés à des distances infiniment petites égales de celui-là sur les sections faites par ces plans. De cette proposition je déduis l'existence de deux directions, au moins, dans lesquelles les angles que je viens de définir sont nuls. Les mêmes considérations appliquées aux sections normales faites dans ces directions, et dans une troisième quelconque, me donnent le théorème d'Euler et l'expression trouvée

par M. Bertrand pour l'angle d'une normale en un point infiniment voisin d'un point considéré, avec le plan normal correspondant.

Comme cet angle revient à chaque instant dans les considérations que je développe, et qu'il m'était impossible de reproduire constamment sa définition, j'ai dû lui donner un nom. Je l'appelle *déviation*, et je nomme *paramètre de déviation* la distance du point considéré au point infiniment voisin divisée par la déviation correspondante. M. Transon a employé avec un sens différent ce même mot de *déviation*, mais dans des questions qui concernent la courbure des lignes. Vous-même vous êtes servi de l'expression de *déviation relative* dans la théorie des courbures comparées de deux lignes tangentes tracées sur une même surface. Je pense qu'il ne peut y avoir aucune confusion. M. Bour et M. Picart ont déjà considéré le paramètre de déviation; ils l'appellent *torsion géodésique*, mais il m'était impossible d'adopter un nom qui suppose des connaissances que je ne donne pas dans mon ouvrage.

J'indique différentes constructions pour les paramètres de déviation, et je montre qu'une certaine hyperbole équilatère joue pour ces longueurs un rôle analogue à celui de l'indicatrice pour les rayons de courbure.

M. Catalan a démontré que le rapport des rayons de courbure en deux points correspondants d'une ligne tracée sur une surface développable et de sa transformée par développement est égal au cosinus de l'angle que forme le plan osculateur de la ligne avec le plan tangent de la surface. Dans le Livre relatif aux surfaces développables, je donne, à l'aide d'une formule de la Trigonométrie sphérique, une démonstration directe de cette proposition; mais, après avoir établi le théorème de Meusnier, je montre qu'elle en est une conséquence.

Lorsqu'on développe une développable, les points d'une courbe tracée sur cette surface décrivent des trajectoires qui sont toujours normales au plan de développement, et qui forment une surface dont la section par un plan tangent à la développable est une transformée de la courbe primitive. Cette courbe et sa transformée appartiennent donc à une même surface, et la seconde de ces lignes est une section normale qui touche la première au point où elle rencontre la géné-

ratrice de contact du plan tangent avec la développable. On voit que le théorème de Meusnier est immédiatement applicable.

On ne possédait pas de formule pour déterminer les rayons de courbure de la section d'une surface par son plan tangent. J'en donne une dans laquelle le rayon d'une branche est exprimé en fonction des rayons de courbure principaux de la surface, et des coordonnées, par rapport au plan tangent, du point infiniment voisin de celui que l'on considère, dans la section normale passant par l'asymptote de l'indicatrice qui touche la branche. J'ai obtenu cette formule par de simples considérations géométriques et par l'analyse; j'en ai fait ensuite l'application au tore : le résultat est d'une grande simplicité.

Les surfaces gauches lieux de normales ont de l'importance en stéréotomie; j'en présente une théorie géométrique due principalement à mon collègue M. Mannheim, mais que j'ai développée sur plusieurs points, ainsi que je l'indique dans une note.

Concevons que l'on élève à une génératrice d'une surface gauche et par son point central une perpendiculaire égale au paramètre de distribution, que par son extrémité on mène deux droites rectangulaires qui rencontrent la génératrice, et qu'on prenne pour origine le point où la première coupe cette ligne : le théorème déjà rappelé de M. Chasles montre que la seconde droite sera telle, que l'angle formé par les rayons vecteurs de deux quelconques de ses points aura la même grandeur que l'angle compris entre les plans tangents aux points de la génératrice qui sont leurs projections.

Cette seconde droite, que j'appelle *droite auxiliaire*, avec M. Mannheim, donne ainsi une représentation géométrique de la loi de variation des plans tangents aux différents points de la génératrice.

On trouve encore que l'ordonnée à l'origine de la droite auxiliaire est moyenne proportionnelle entre les grandeurs absolues des rayons de courbure principaux de la surface à ce point.

Au moyen de la droite auxiliaire, on peut résoudre par des constructions d'une grande simplicité les principaux problèmes qui concernent une surface gauche, quand les plans tangents en trois points de chaque génératrice sont connus. Or, pour une surface lieu de nor-

males, on a immédiatement le plan tangent au point où la génératrice considérée perce la surface directrice, et il est facile de reconnaître à l'aide d'un théorème de M. Sturm que le plan d'une section principale de cette surface est tangent à la surface des normales au centre de courbure de l'autre section principale; la méthode que je viens d'indiquer peut donc être employée pour l'étude d'une surface gauche lieu de normales. Elle fait trouver très-facilement plusieurs théorèmes connus, notamment ceux que M. Joachimsthal a donnés dans votre journal, et plusieurs propositions nouvelles qu'il serait trop long de développer ici.

Cette théorie n'a pas seulement de l'importance pour les surfaces lieux de normales, elle conduit encore à des constructions très-simples pour déterminer en un point d'une surface le rayon de courbure d'une section normale, le paramètre de déviation et la direction conjuguée qui correspondent à un azimut donné, lorsqu'on connaît les plans et les rayons des sections principales.

Les principales applications que je présente de la théorie de la courbure des surfaces sont relatives à la détermination des rayons de courbure et des plans osculateurs d'une courbe donnée par ses projections, à la construction des sommets des surfaces d'égale pente, au tracé des tangentes à la courbe d'intersection de deux surfaces qui se touchent, enfin à la détermination des tangentes et des points singuliers d'une ligne d'ombre. Je m'arrêterai quelques instants à cette dernière question.

Les surfaces, telles qu'on les considère dans les problèmes d'ombre, recouvrent des corps opaques, et la courbe de contact d'un cône circonscrit ne forme ligne d'ombre propre, lorsqu'un point lumineux est au sommet, que lorsque les génératrices rectilignes sont extérieures. Si, près du point de tangence, les génératrices sont dans l'intérieur du corps, la courbe de contact n'a aucune importance.

D'après cela, je divise les points d'une courbe d'ombre en *réels* et *virtuels*. Les derniers sont situés sur des tangentes géométriques qui n'existent pas comme rayons de lumière. Si le corps opaque se trouvait de l'autre côté de la surface, les points réels se trouveraient virtuels et réciproquement. Ainsi, par exemple, les points réels de la ligne d'ombre propre d'une vis deviennent virtuels quand on considère l'écrou.

Les points réels et les points virtuels forment quelquefois des courbes distinctes, mais le plus souvent on trouve une seule courbe composée d'arcs réels et d'arcs virtuels : il est alors fort important de déterminer les points limites. En ces points, la génératrice du cône circonscrit passe de l'intérieur à l'extérieur du corps; elle a donc un contact du second ordre avec la surface, et, par suite, elle est une des deux asymptotes de l'indicatrice. Il résulte de là, en vertu du théorème des tangentes conjuguées, qu'aux points limites le rayon de lumière touche la ligne d'ombre.

Puisqu'en un point limite la génératrice a un contact du second ordre avec la surface, il faut qu'un point de la courbe d'intersection, c'est-à-dire un point de la ligne d'ombre portée par la surface sur elle-même, soit venu se confondre avec le point de la courbe d'ombre propre situé sur la même génératrice. Une étude attentive de la question montre que la courbe d'ombre portée est composée d'arcs réels et d'arcs virtuels comme la courbe d'ombre propre; que ces deux lignes ont les mêmes points limites, les mêmes tangentes en ces points, et qu'ainsi les arcs réels de la courbe d'ombre portée continuent les arcs réels de la courbe d'ombre propre en se raccordant avec eux. Il suit de là que les points limites ne présentent rien de remarquable sur les corps éclairés, mais ces diverses circonstances n'en sont pas moins intéressantes sous le rapport géométrique, et il est nécessaire de les connaître pour tracer avec exactitude les ombres sur les surfaces à courbures opposées.

Cette théorie n'est pas entièrement nouvelle; on en trouve des parties dans les ouvrages de MM. Hachette et Leroy, mais je crois que vous reconnaîtrez que j'ai levé les obscurités assez grandes dont elle était encore entourée.

Je ne m'arrêterai pas à vous développer les constructions que j'ai données pour la détermination des points limites des courbes d'ombre, et je termine sur ce sujet en vous citant deux propositions que je crois nouvelles.

Quand sur une surface la courbe d'ombre propre et la courbe d'ombre portée par une autre surface quelconque se rencontrent, ces lignes sont tangentes à deux diamètres conjugués de l'indicatrice du point commun. — Ce théorème permet de construire mécaniquement

la direction conjuguée d'une tangente, en un point donné de la surface d'un corps; il appartient en partie à M. Mannheim, car je l'ai obtenu en complétant une remarque qu'il m'avait communiquée.

Quand une surface est osculée par un plan en un point, si elle est éclairée par un point lumineux situé dans ce plan, deux branches de la courbe d'ombre passent par le point d'osculation, et sont tangentes aux deux droites qui forment le diamètre de l'indicatrice du troisième ordre par rapport à la direction du rayon de lumière. — Ce théorème ne conduit pas, en général, à des constructions faciles, mais il explique la manière dont la courbe d'ombre est disposée dans un cas intéressant. On peut en déduire un résultat que je vous ai signalé plus haut sur le point où la courbe d'ombre d'une surface gauche coupe une génératrice singulière, lorsque le point lumineux est dans le plan tangent le long de cette droite.

A l'aide du théorème de M. Bertrand, j'établis immédiatement l'existence des lignes de courbure. J'expose, d'après M. Dupin, la théorie de ces lignes sur les surfaces du second ordre, et j'en fais l'application à un ellipsoïde scalène en reproduisant les épures de Monge. Je montre ensuite que chacune de ces figures donne la projection des lignes de courbure d'une série indéfinie de surfaces du second ordre, si l'on considère le système complet des coniques qui y sont représentées.

Je dis peu de chose sur les lignes asymptotiques. J'établis que sur une surface gauche toutes ces lignes (autres que les génératrices) passent à chaque sommet et y sont, en général, tangentes à la génératrice. Je considère ensuite les surfaces de révolution, et je trouve que quand la séparation des parties convexes et à courbures opposées est faite par un parallèle le long duquel la surface a un plan tangent unique, les asymptotiques sont asymptotes de ce cercle; et que quand un parallèle d'inflexion fait la séparation, chacun de ses points est un point de rebroussement pour une asymptotique.

Je termine le huitième Livre en considérant les lignes tracées sur une surface et tangentes aux sections normales surosculées par des cercles. Par chaque point d'une surface il passe trois sections de ce genre, et, par suite, les lignes en question présentent trois séries dont une, au moins, est toujours réelle. J'établis l'équation différentielle de ces

lignes, et j'en fais l'application aux surfaces du second ordre. Je trouve d'abord les génératrices rectilignes, puis des courbes qui, lorsqu'on les considère sur l'ellipsoïde central d'un corps, sont les *polhodies* de M. Poinsot, c'est-à-dire les lignes de contact de l'ellipsoïde avec une développable circonscrite à cette surface et à une sphère concentrique. J'adopte le nom de *polhodie* en l'étendant aux courbes de même définition sur toutes les surfaces du second ordre.

J'ai déjà publié ces résultats, au moins en partie, dans votre journal. M. Mannheim en a trouvé une démonstration géométrique qui m'a permis de reléguer mon analyse dans une note.

IV.

Le Livre IX est consacré aux hélicoïdes.

Dans les problèmes graphiques qui concernent ces surfaces, on voit constamment paraître une longueur égale au pas des hélices divisé par le double du rapport de la circonférence au diamètre : c'est le rapport constant qui existe entre l'ordonnée rectiligne d'un point d'une hélice et l'angle qui mesure son abscisse curviligne dans la section droite du cylindre sur lequel on peut concevoir cette courbe tracée. Je suppose que lorsque l'on opère sur un hélicoïde, on construit tout d'abord ce paramètre, et, afin de simplifier le langage, je lui ai donné un nom, celui de *pas réduit*.

Après avoir défini les hélicoïdes réglés, j'ai déterminé le paramètre de leurs génératrices, et j'ai cherché à présenter sur les signes des quantités qui entrent dans son expression, et sur la disposition des constructions graphiques par lesquelles on peut l'obtenir, des conventions qui fassent toujours connaître son signe, c'est-à-dire le sens dans lequel le plan tangent tourne quand le point de contact s'éloigne du point central.

Je ne m'arrête pas aux développements contenus dans le chapitre de la théorie générale, et je passe aux hélicoïdes individuels.

Pour l'hélicoïde développable, je me borne à vous dire qu'à l'occasion de cette surface je suis revenu sur des considérations que j'avais déjà présentées dans le sixième Livre au sujet des inflexions des courbes

transformées par développement, et du cas où le rebroussement de premier ordre qu'une courbe tracée sur la surface possède au passage d'une nappe à l'autre se change, dans le développement, en un rebroussement de second ordre.

Dans le chapitre relatif à la surface de la vis à filets triangulaires, je vous indiquerai des tracés simples pour la détermination du plan tangent en un point, et la recherche du point où un plan contenant une génératrice touche la surface.

M. Poncelet a donné une construction très-élégante de la projection horizontale de la ligne d'ombre, dans le cas de rayons parallèles. Je fais connaître pour ce problème plusieurs autres constructions faciles : une d'elles permet de déterminer les points de la ligne d'ombre qui sont sur une hélice donnée; une autre, moins commode que celle de M. Poncelet pour la discussion de la courbe, me paraît préférable dans la pratique pour la tracer d'une manière prompte et exacte.

De la construction même de la projection horizontale de la courbe d'ombre, on déduit sans difficulté la tangente de cette courbe en un certain point qui, considéré sur l'hélicoïde, n'a aucune position particulière. Comme d'ailleurs on connaît la direction du rayon de lumière, et la génératrice qui est une des deux asymptotes de l'indicatrice, on peut obtenir par le théorème des tangentes conjuguées la deuxième asymptote. J'arrive ainsi, par des raisonnements très-simples, à la solution générale des problèmes qui exigent la connaissance de l'indicatrice, tels que la détermination des points limites des parties utiles des lignes d'ombre et celle des tangentes de ces courbes, même dans le cas où les rayons sont divergents.

Je donne une démonstration géométrique de la propriété que possède la surface de la vis à filets carrés d'être la seule surface gauche dans laquelle les rayons de courbure aient en un point des grandeurs absolues égales.

Les deux propositions suivantes sont nouvelles :

Sur la surface de la vis à filets carrés, les lignes tangentes aux sections normales surosculées par des cercles se coupent sous des angles

de 60 degrés. — Il est inutile de rappeler que les génératrices sont les lignes de l'une des trois séries.

La projection, sur un plan perpendiculaire à l'axe, du lieu des centres de courbure principaux d'une surface de vis à filets carrés, aux divers points d'une génératrice, est une hyperbole équilatère dont l'axe transverse a une longueur double du pas réduit de la surface.

Il existe pour toutes les surfaces à plan directeur un théorème analogue à ce dernier : La projection du lieu des centres de courbure principaux d'un conoïde général aux différents points d'une génératrice, sur un plan parallèle au plan directeur, est une hyperbole.

Parmi les constructions que je donne pour les hélicoïdes réglés, quelques-unes sont assez simples : d'abord celle de la courbe d'ombre dans le cas de rayons parallèles, ensuite et surtout la détermination des asymptotes de l'indicatrice en un point quelconque. Je montre que l'on obtient facilement ces droites en construisant les asymptotes de l'indicatrice de la surface de révolution qui aurait le même axe et la même méridienne, et en leur faisant éprouver un déplacement d'après le pas réduit de la surface et l'inclinaison des tangentes à la méridienne. On étend sans difficulté cette construction au cas où les asymptotes de l'indicatrice sont réelles sur l'hélicoïde, mais imaginaires sur la surface de révolution. La solution est plus compliquée quand il faut avoir les indicatrices elliptiques de la partie convexe de l'hélicoïde.

Dans l'étude de ces questions, j'obtiens le théorème suivant : Si l'on considère la série des hélicoïdes que peut décrire une courbe plane en tournant autour d'une droite située dans son plan, lorsqu'on fait varier le pas des hélices, les asymptotes de indicatrices de ces diverses surfaces, en un point donné de la méridienne commune, forment un cône du second ordre dont un des plans tangents est parallèle à l'axe et perpendiculaire au plan qui contient la méridienne.

L'épure d'un serpentin me donne une occasion de revenir sur les points limites des parties réelles des courbes de contour apparent. Cette question est identique à celle des points limites des courbes d'ombre.

V.

Dans le Livre X, je m'occupe des surfaces topographiques.

On emploie généralement pour la construction du plan tangent à ces surfaces une méthode due à Meusnier, dans laquelle on ramène le problème à une question de maximum, comme cela a déjà été fait dans d'autres circonstances. Ainsi, pour déterminer un plan qui touche une surface et contienne une droite, on trace des tangentes aux lignes de niveau de la surface par les points de la droite situés respectivement dans les mêmes plans horizontaux, et on cherche quelle est celle des lignes ainsi obtenues qui fait un angle maximum ou minimum avec une droite quelconque du plan. Les diverses tangentes forment un conoïde circonscrit à la surface et qui est touché par le plan tangent le long d'une arête. La théorie des génératrices singulières des surfaces gauches se rattache donc directement à la méthode de Meusnier; elle donne à ses diverses applications une plus grande clarté.

La théorie des parties virtuelles des courbes d'ombre et de leurs points limites explique également toutes les particularités que présente le problème du cône circonscrit à la surface du terrain.

Je n'ai pas parlé des faîtes et des thalwegs, parce qu'il y a encore des obscurités sur la nature géométrique de ces lignes; j'ai seulement montré comme un fait, par l'étude de quelques surfaces, que les lignes de plus grande pente sont réparties par groupes, et que celles d'entre elles qui forment transition ont, pour les pentes, des propriétés spéciales. Les projections des faîtes sur un plan horizontal sont ainsi des lignes de transition dans une série de courbes représentées par une même équation avec un paramètre variable. Il semble d'après cela que la question des faîtes et des thalwegs se rattache à une théorie connue; toutefois elle présente encore des difficultés sérieuses, au moins pour l'interprétation géométrique.

L'ouvrage est terminé par un chapitre dans lequel j'explique l'usage des surfaces topographiques pour remplacer les courbes à double entrée et l'anamorphose des tableaux graphiques. J'aurais désiré présenter quelques exemples sur des problèmes d'application, mais il

m'aurait fallu entrer dans des détails techniques sur les différentes questions.

Je vous laisserais peut-être une fausse opinion sur mon travail, si je ne vous disais pas en terminant que le genre de mérite que j'ai le plus recherché est une grande exactitude dans le trait. J'ai désiré que tout lecteur connaissant les arts graphiques, et principalement la stéréotomie, pût dire à chaque construction : C'est bien ainsi qu'on doit opérer.

Je vous prie, Monsieur et cher ancien Professeur, de me pardonner la longueur de cette lettre, et d'agréer l'expression de mon respect et de mon entier dévouement.

Paris, 17 novembre 1864.

SUR LA FORME

$$x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Après ce que nous avons donné (dans le cahier d'août) au sujet des deux formes à six variables

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)$$

et

$$x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

c'est chose bien facile que de trouver une expression simple du nombre des représentations d'un entier donné n par la forme nouvelle

$$x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2,$$

c'est-à-dire du nombre

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2]$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2,$$

dans laquelle x, y, z, t, u, v sont des entiers indifféremment pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs.

Il est évident, en effet, que quand n est impair la valeur demandée de

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2]$$

est précisément la moitié de celle de

$$\mathrm{N}[n = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2 + u^2 + v^2)],$$

et que quand n est au contraire un nombre pair $2g$ elle est égale à

celle de

$$N[g = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2)].$$

2. Pour déduire de là des formules explicites, nous poserons

$$n = 2^\alpha m,$$

m désignant un entier impair, et nous distinguerons trois cas, savoir : le cas de $\alpha = 0$, celui de $\alpha = 1$, celui de $\alpha > 1$.

Pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impair m, la formule est

$$N[m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 2\rho_2(m),$$

$\rho_2(m)$ désignant (comme à l'endroit cité plus haut) la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} d^2,$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$.

Pour $\alpha = 1$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impairement pair $2m$, on a

$$N[2m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 8\rho_2(m).$$

Enfin pour $\alpha > 1$, c'est-à-dire quand l'entier $2^\alpha m$ est pairement pair, on obtient

$$N[2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 4\left[2^{2\alpha - 1} - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_2(m).$$

Je ne pense pas qu'il soit nécessaire d'ajouter des exemples.

3. Nous venons de déterminer pour toutes les valeurs possibles de α et de m le nombre total

$$N[2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2]$$

des solutions propres ou impropres de l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2.$$

Mais on peut aussi désirer d'avoir séparément le nombre

$$\mathrm{M}\left[2^{\alpha} m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2\right]$$

des solutions propres, c'est-à-dire des solutions qui subsistent quand on exige que les indéterminées x, y, z, t, u, v n'aient aucun facteur commun > 1.

Il faut alors substituer à la fonction

$$\rho_2(m)$$

la fonction

$$\mathrm{R}_2(m)$$

que nous définissons, au moyen de la valeur de m mise sous la forme d'un produit de puissances de nombres premiers distincts, en disant que si

$$m = \prod (a^r),$$

on aura

$$\mathrm{R}_2(m) = \prod\left[a^{2r} + (-1)^{\frac{a-1}{2}} a^{2r-2}\right].$$

On distinguera d'ailleurs cinq cas suivant que l'exposant α sera égal à 0, ou égal à 1, ou égal à 2, ou égal à 3, ou enfin > 3.

Pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impair m, la formule est

$$\mathrm{M}\left[m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2\right] = 2\,\mathrm{R}_2(m).$$

Pour $\alpha = 1$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impairement pair $2m$, j'obtiens

$$\mathrm{M}\left[m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2\right] = 8\,\mathrm{R}_2(m).$$

Ces deux équations ne diffèrent de celles qui fournissent pour m ou pour $2m$ le nombre total des représentations propres ou impropres par la forme indiquée qu'en ce que

$$\mathrm{R}_2(m)$$

y remplace

$$\rho_2(m).$$

Il n'en est pas de même pour celles qui vont suivre.

Je trouve, en effet, pour le cas de $\alpha = 2$, la formule que voici :

$$M[4m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 2\left[15 - 2(-1)^{\frac{m-1}{2}}\right] R_2(m),$$

où le coefficient de $R_2(m)$ est altéré.

Même remarque pour le cas de $\alpha = 3$, où l'on a

$$M[8m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 4\left[30 - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right] R_2(m),$$

et aussi pour le cas de

$$\alpha > 3.$$

la formule devenant alors

$$M[2^\alpha m = x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2 + u^2) + 4v^2] = 15.2^{2\alpha-3} R_2(m)$$

FIN DU TOME NEUVIÈME (2e SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

QA
1
J684
sér.2
t.9
Physical &
Applied Sci.
Serials

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY